8ページまで。それ以降は証明の為に使った定理の証明

Mathematica等 複素計算が可能なソフトを使用せずともQ2が解ける事の証明

NO. 1

DATE

氏名：Mathematicaを嫌う者　　学番：明記しない．

Q2.

波長620nmの電磁波は可視光域の電磁波であるので Fresnelの公式を用いる事が出来る事に注意すると電磁気学Ⅱの教科書 p.25 (2.59)により TM波の反射率 r_{TM} は

$$r_{TM} = \frac{n_2 \cdot \cos\theta_i - n_1 \cdot \cos\theta_t}{n_2 \cdot \cos\theta_i + n_1 \cdot \cos\theta_t}$$

$$= \frac{\frac{n_2}{n_1} \cdot \cos\theta_i - \cos\theta_t}{\frac{n_2}{n_1} \cdot \cos\theta_i + \cos\theta_t}$$

と表せる。ここで、媒質1を真空（屈折率1）とし、媒質2を金（屈折率 $\hat{n}$ ）とすると上式は

$$r_{TM} = \frac{\frac{\hat{n}}{1} \cdot \cos\theta_i - \cos\theta_t}{\frac{\hat{n}}{1} \cdot \cos\theta_i + \cos\theta_t}$$

$$= \frac{\hat{n} \cdot \cos\theta_i - \cos\theta_t}{\hat{n} \cdot \cos\theta_i + \cos\theta_t} \qquad (1)$$

と表せる。

一方で、Snellの法則より

$$1 \cdot \sin\theta_i = \hat{n} \cdot \sin\theta_t$$

$$\sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{\hat{n}}$$

$$\mathrm{Arcsin}\,(\sin\theta_t) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sin\theta_i}{\hat{n}}\right)$$

KOKUYO

$$\therefore \theta_t = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sin\theta_i}{\hat{n}}\right)$$

であるので、これを(1)に代入して

$$r_{TM} = \frac{\hat{n}\cdot\cos\theta_i - \cos\left\{\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sin\theta_i}{\hat{n}}\right)\right\}}{\hat{n}\cdot\cos\theta_i + \cos\left\{\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sin\theta_i}{\hat{n}}\right)\right\}}$$

$$= \frac{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \mp \left[\cos^2\left\{\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sin\theta_i}{\hat{n}}\right)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}}{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \pm \left[\cos^2\left\{\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sin\theta_i}{\hat{n}}\right)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{(複号同順)}$$

$$= \frac{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \mp \left[1-\sin^2\left\{\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sin\theta_i}{\hat{n}}\right)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}}{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \pm \left[1-\sin^2\left\{\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sin\theta_i}{\hat{n}}\right)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \mp \left[1-\left(\frac{\sin\theta_i}{\hat{n}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \pm \left[1-\left(\frac{\sin\theta_i}{\hat{n}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \mp \left(1-\frac{\sin^2\theta_i}{\hat{n}^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \pm \left(1-\frac{\sin^2\theta_i}{\hat{n}^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

を得る。

次に、$\left(1-\frac{\sin^2\theta_i}{\hat{n}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ の値を求める。教科書 p.37 (3.18)より

$$\hat{n} = n(1-ik) \qquad (n, k\text{は実数})$$

であるので、

$$\left(1-\frac{\sin^2\theta_i}{\hat{n}^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[1-\frac{\sin^2\theta_i}{\{n(1-ki)\}^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{1-\frac{\sin^2\theta_i}{n^2(1-ki)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{1-\frac{\sin^2\theta_i}{n^2(1-ki)^2}\times\frac{(1+ik)^2}{(1+ik)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1-\frac{\sin^2\theta_i}{n^2\{(1-ki)(1+ik)\}^2}(1+ik)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1-\frac{\sin^2\theta_i}{n^2\{1^2-(ki)^2\}^2}\cdot\{1+2ik+(ik)^2\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{1-\frac{\sin^2\theta_i}{n^2(1+k^2)^2}(1+2ik-k^2)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1-\frac{\sin^2\theta_i}{n^2(1+k^2)^2}\{(1-k^2)+2ik\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{1-\frac{\sin^2\theta_i(1-k^2)}{n^2(1+k^2)^2}-\frac{2ik\cdot\sin^2\theta_i}{n^2(1+k^2)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \left(1-\frac{\sin^2\theta_i}{\hat{n}^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left\{1-\frac{\sin^2\theta_i(1-k^2)}{n^2(1+k^2)^2}\right\}-i\,\frac{2k\sin^2\theta_i}{n^2(1+k^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。与えられた条件および教科書p.37 表3.1の値より

$$-\frac{2k\cdot\sin^2\theta_i}{n^2(1+k^2)^2} \neq 0$$

であるので、巻末の付録で証明した定理により

$$\begin{cases} \alpha = 1-\dfrac{\sin^2\theta_i\cdot(1-k^2)}{n^2(1+k^2)^2} \\ \beta = -\dfrac{2k\cdot\sin^2\theta_i}{n^2(1+k^2)^2} \end{cases} \tag{3}$$

とおくと

$$\left(1-\frac{\sin^2\theta_i}{\hat{n}^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right) \tag{4}$$

が成り立つ。教科書p.37 表3.1より $0<k$ であるので、$\beta<0$ である。従って、

$$\frac{\beta}{|\beta|} = \frac{\beta}{-\beta} = -1$$

が成り立つので、(4)は

$$\left(1-\frac{\sin^2\theta_i}{\hat{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right) \tag{5}$$

と表せる。ここで、

$$\begin{cases} A = \sqrt{\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \\ B = \sqrt{\dfrac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \end{cases} \tag{6}$$

とおくと(5)は

$$\left(1-\frac{\sin^2\theta_i}{\hat{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm(A-iB)$$

と表せる。これを r_{TM} に代入して

$$r_{TM} = \frac{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \mp \{\pm(A-iB)\}}{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \pm \{\pm(A-iB)\}}$$

$$= \frac{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \mp (A-iB)}{\hat{n}\cdot\cos\theta_i \pm (A-iB)}$$

$$= \frac{n(1-ik)\cos\theta_i \mp (A-iB)}{n(1-ik)\cdot\cos\theta_i \pm (A-iB)}$$

$$= \frac{n\cdot\cos\theta_i - ink\cdot\cos\theta_i \mp A \pm iB}{n\cdot\cos\theta_i - ink\cdot\cos\theta_i \pm A \mp iB}$$

$$= \frac{(n\cdot\cos\theta_i \mp A) - i(nk\cdot\cos\theta_i \mp B)}{(n\cdot\cos\theta_i \pm A) - i(nk\cdot\cos\theta_i \pm B)}$$ （複号同順）

を得る。従って、強度反射率 R_{TM} は

$$R_{TM} = |r_{TM}|^2$$

$$= \left|\frac{(n\cdot\cos\theta_i \mp A) - i(nk\cdot\cos\theta_i \mp B)}{(n\cdot\cos\theta_i \pm A) - i(nk\cdot\cos\theta_i \pm B)}\right|^2$$

$$= \frac{|(n\cdot\cos\theta_i \mp A) - i(nk\cdot\cos\theta_i \mp B)|^2}{|(n\cdot\cos\theta_i \pm A) - i(nk\cdot\cos\theta_i \pm B)|^2}$$

$$= \frac{\{(n\cdot\cos\theta_i \mp A) - i(nk\cdot\cos\theta_i \mp B)\}\{(n\cdot\cos\theta_i \mp A) + i(nk\cdot\cos\theta_i \mp B)\}}{\{(n\cdot\cos\theta_i \pm A) - i(nk\cdot\cos\theta_i \pm B)\}\{(n\cdot\cos\theta_i \pm A) + i(nk\cdot\cos\theta_i \pm B)\}}$$

$$= \frac{(n\cdot\cos\theta_i \mp A)^2 - \{i(nk\cdot\cos\theta_i \mp B)\}^2}{(n\cdot\cos\theta_i \pm A)^2 - \{i(nk\cdot\cos\theta_i \pm B)\}^2}$$

$$= \frac{(n\cdot\cos\theta_i \mp A)^2 + (nk\cdot\cos\theta_i \mp B)^2}{(n\cdot\cos\theta_i \pm A)^2 + (nk\cdot\cos\theta_i \pm B)^2}$$

$$= \frac{n^2\cdot\cos^2\theta_i \mp 2An\cdot\cos\theta_i + A^2 + n^2k^2\cdot\cos^2\theta_i \mp 2Bnk\cdot\cos\theta_i + B^2}{n^2\cdot\cos^2\theta_i \pm 2An\cdot\cos\theta_i + A^2 + n^2k^2\cdot\cos^2\theta_i \pm 2Bnk\cdot\cos\theta_i + B^2}$$

$$= \frac{n^2(1+k^2)\cdot\cos^2\theta_i \mp 2(A+Bk)n\cos\theta_i + A^2+B^2}{n^2(1+k^2)\cdot\cos^2\theta_i \pm 2(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i + A^2+B^2}$$

$$= \frac{n^2(1+k^2)\cdot\cos^2\theta_i + A^2+B^2 + \overset{\mp 2}{\overbrace{(\pm 2 \mp 4)}}(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i}{n^2(1+k^2)\cdot\cos^2\theta_i \pm 2(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i + A^2+B^2}$$

$$= \frac{n^2(1+k^2)\cdot\cos^2\theta_i + A^2+B^2 \pm 2(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i \mp 4(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i}{n^2(1+k^2)\cdot\cos^2\theta_i + A^2+B^2 \pm 2(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i}$$

$$= 1 + \frac{\mp 4(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i}{n^2(1+k^2)\cdot\cos^2\theta_i + A^2+B^2 \pm 2(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i} \quad \text{(複号同順)} \quad (7)$$

と表せる。ここで、与えられた条件，教科書 p.37 表3.1，(6)より

$$0 < 4(A+kB)n\cdot\cos\theta_i$$

である事と(7)の第2項目の分母は元々

$$(n\cdot\cos\theta_i \pm A)^2 + (nk\cdot\cos\theta_i \pm B)^2$$

なる形をしており、

$$0 < (n\cdot\cos\theta_i \pm A)^2 + (nk\cdot\cos\theta_i \pm B)^2$$

が成り立つ事に注意すると

$$R_{TM} = 1 + \frac{4(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i}{n^2(1+k^2)\cdot\cos^2\theta_i + A^2+B^2 - 2(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i}$$

は強度反射率が 1を超え、エネルギー保存則に触触するので不適である。ゆえに

$$R_{TM} = 1 - \frac{4(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i}{n^2(1+k^2)\cdot\cos^2\theta_i + A^2+B^2 + 2(A+Bk)n\cdot\cos\theta_i} \tag{8}$$

が成り立つ。
一方で、(6)より

$$A^2+B^2 = \left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} + \frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$$

$$= \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$$

$$\therefore\ A^2+B^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \tag{9}$$

が成り立つ。同様に(6)より

$$A+Bk = \sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\cdot k$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{2}}\cdot k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot k\right)$$

$$\therefore A+B = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot k\right)$$

が成り立つ。上式と(9)を(8)に代入して

$$R_{TM} = 1 - \frac{4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot k\right) n\cdot\cos\theta_i}{n^2(1+k^2)\cdot\cos^2\theta_i + \sqrt{\alpha^2+\beta^2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot k\right) n\cdot\cos\theta_i}$$

$$\therefore R_{TM} = 1 - \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + k\sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\cdot n\cdot\cos\theta_i}{n^2(1+k^2)\cdot\cos^2\theta_i + \sqrt{\alpha^2+\beta^2} + \sqrt{2}\left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + k\sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) n\cdot\cos\theta_i}$$

（但し、$\alpha = 1 - \frac{(1-k^2)\cdot\sin^2\theta_i}{n^2(1+k^2)^2}$，$\beta = -\frac{2k\cdot\sin^2\theta_i}{n^2(1+k^2)^2}$ である）

を得る。これに与えられた条件および教科書p.37 表3.1の値

$$\theta_i = 45^\circ,\quad n = 0.35,\quad k = 9.03$$

を代入して『電卓で』計算すると

$$R_{TE} = 0.8410\cdots\cdots$$

$$\therefore R_{TE} \cong 0.84$$

となる。

よって、Q2はMathematica等の複素計算が可能なソフトを使わなくても算出可能である（$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ を既知とすれば平方根及び四則演算が出来る電卓で十分である）。

付録　定理 及び その証明

定理

α, β を実数とする。この時 $\beta \neq 0$ ならば

$$(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{2}} = \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right)$$

が成り立つ。

証明

x, y を実数とする。この時

$$(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{2}} = x+iy$$

すなわち

$$\alpha+i\beta = (x+iy)^2$$

を満たす実数 x, y を求めればよい。上式を式変形して

$$\alpha+i\beta = x^2+2xyi+(iy)^2$$

$$= x^2+2xyi-y^2$$

$$= (x^2-y^2)+2xy\cdot i$$

$$\therefore\ \alpha = x^2-y^2,\quad \beta = 2xy \tag{1}$$

を得る。ここで、

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2+4x^2y^2$$

$$= (x-y)^2 + (2xy)^2$$

であるので、これに(1)を代入して

$$(x^2+y^2) = \alpha^2 + \beta^2$$

$$x^2+y^2 = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad (2)$$

を得る。x, yが実数である事から

$$0 \leqq x^2+y^2$$

が成り立つので(2)は

$$x^2+y^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad (3)$$

となる。上式に(1)の第1式

$$x^2-y^2 = \alpha$$

を加えて

$$(x^2+y^2)+(x^2-y^2) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} + \alpha$$

$$x^2+y^2+x^2-y^2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$2x^2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$x^2 = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \qquad (4)$$

を得る。

同様に(3)から(1)の第1式を引いて

$$(x^2+y^2)-(x^2-y^2)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha$$

$$x^2+y^2-x^2+y^2=-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$2y^2=-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$y^2=\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$$

$$\therefore y=\pm\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \tag{5}$$

を得る。

(4),(5)の複号は任意に選べる訳ではなく、(1)の第2式

$$2xy=\beta$$

により、xとyの積の符号がβと一致する様に選ばなければならない事が分かる。$\beta \neq 0$を仮定したのでβの符号が$\beta/|\beta|$で表せる事に注意すると

$$(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\pm i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}$$

(複号同順)

$$\therefore (\alpha+i\beta)^{\frac{1}{2}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}+i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right)$$

が成り立つ。

[証明終]