No. A+

電磁気学II レポート 第2回 メ切 5/24 [redacted]

たいへん良くできました。

Q1. $\nabla^2 A_z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2}$ より

$$\nabla^2 A_z = \frac{2}{r}\cdot\left(-\frac{\mu}{4\pi r^2} i\omega p_z e^{i\omega t}\right) + \left(\frac{2\mu}{4\pi r^3} i\omega p_z e^{i\omega t}\right)$$

$$= 0$$

一方

$$-\varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_z = -\varepsilon\mu (i\omega)^2 \frac{\mu}{4\pi r} i\omega p_z e^{i\omega t}$$

$$= \varepsilon\mu^2 i\omega^3 \frac{1}{4\pi r} p_z e^{i\omega t}$$

∴

$\left(\nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_z = 0$ を満たさない。

$A_z(r, t) = \frac{\mu}{4\pi r} i\omega p_z e^{i\omega t}$ は Maxwell eq の解でない。

Q2

$\eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ より $\varepsilon E^2 = \mu H^2$ が得られる。

∴

単位体積あたりの E のエネルギー $= \frac{1}{2}\varepsilon E^2$ なので、

E, H の運ぶエネルギーは等しい。

Q3. 極座標表示を用いて,

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial\phi}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}}_{①} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right]}_{②}$$

ここで $\phi(r,\theta,t) = \dfrac{P_z e^{i(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{ik}{r}+\dfrac{1}{r^2}\right)\cos\theta$.

$A = \dfrac{P_z e^{i(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon}\cos\theta$ とおく.

$$① \Rightarrow \frac{2}{r}\left[A\cdot(-ki)\left(\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}\right) + A\left(-\frac{ik}{r^2}-\frac{2}{r^3}\right)\right]$$

$$+ \left[(-ki)^2\left(\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\cdot A + (-ki)\cdot A\left(-\frac{ik}{r^2}-\frac{2}{r^3}\right)\right.$$

$$\left. + (-ki)A\left(-\frac{ik}{r^2}-\frac{2}{r^3}\right) + A\left(\frac{2ik}{r^3}+\frac{6}{r^4}\right)\right]$$

$$② \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left[A\left(\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\frac{(-\sin\theta)}{\cos\theta}\right] + \frac{1}{r^2}\left[A\left(\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\frac{(-\cos\theta)}{\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[-A\left(\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\right] + \frac{1}{r^2}\left[-A\left(\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{r^2}\left[-A\left(\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

No.

したがって,

① ⇒ $\frac{r}{2}\left[(-ki)\phi - \frac{1}{r}\phi - \frac{A}{r^3}\right] + \left[(-ki)^2\phi - 2(-ki)\frac{\phi}{r} - 2(-ki)\frac{A}{r^3} + 2\frac{\phi}{r^2} + \frac{4}{r^4}A\right]$

② ⇒ $-\frac{2}{r^2}\phi$

また, $-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\varepsilon\mu(i\omega)^2 A\cdot\left(\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right)$

$= \varepsilon\mu\omega^2 A\cdot\left(\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right)$

$= \varepsilon\mu\omega^2\phi$.

∴ $\nabla^2\phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ は,

$= \frac{2}{r}(-ki)\phi - \frac{2}{r^2}\phi - \frac{2A}{r^4} - k^2\phi + 2ki\frac{\phi}{r} + 2ki\frac{A}{r^3} + 2\frac{\phi}{r^2} + \frac{4}{r^4}A$

$-\frac{2}{r^2}\phi + \varepsilon\mu\omega^2\phi$

$= \phi\left(-k^2 - \frac{2}{r^2} + \varepsilon\mu\omega^2\right) + 2ki\frac{A}{r^3} + \frac{2}{r^4}A$

$= \phi\left(-k^2 - \frac{2}{r^2} + \varepsilon\mu\omega^2\right) + 2\frac{A}{r^2}\left(\frac{ki}{r} + \frac{1}{r^2}\right)$

$= \phi\left(-k^2 - \frac{2}{r^2} + \varepsilon\mu\omega^2\right) + 2\frac{1}{r^2}\phi$.

$= \phi\left(-k^2 + \varepsilon\mu\omega^2\right)$

∴ 任意の ϕ に対してゼロとなるためには, $-k^2 + \varepsilon\mu\omega^2 = 0$
とならなければならない.

∴ $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2$ は分散関係で $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

∴ ϕ は Maxwell eq の解となる.