電磁気学Ⅱ　第2回レポート　〆切 5/24

[redacted]

A++
たいへん
良くできました

Q1

$$\begin{cases} A_z(r,t) = \dfrac{\mu}{4\pi r}\, i\omega P_z\, e^{i\omega t} \\ \left(\nabla^2 - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_z = 0 \quad \cdots ① \end{cases}$$

証明)

①式について、

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_z = 0$$

$$\therefore \nabla^2 A_z = \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \cdots ②$$

ならば、A_z は Maxwell 方程式の解である。

②式について、

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial A_z}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 A_z}{\partial\varphi^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{-\mu}{4\pi r^2}\, i\omega P_z\, e^{i\omega t}\right) = 0$$

$$(\text{右辺}) = \varepsilon\mu \frac{\mu}{4\pi r}\, i\omega P_z \left(-\omega^2 e^{i\omega t}\right)$$

$$= -\frac{\varepsilon\mu^2}{4\pi r}\, i\omega^3 P_z\, e^{i\omega t} \neq 0$$

よって、①式を満たさないことから、A_zは Maxwell 方程式の解になっていない。 終

Q2.

証明)

$$\begin{cases} \text{電場のエネルギーは、単位体積当たり}: u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ \text{磁場のエネルギーは、単位体積当たり}: u_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \\ \text{特性インピーダンス}: \eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \end{cases}$$

電場のエネルギーと磁場のエネルギーの比は、

$$\sqrt{\frac{u_e}{u_m}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{E}{H} = \frac{1}{\eta}\cdot\eta = 1$$

よって、電磁波により電場が運ぶエネルギーと、磁場が運ぶエネルギーは、常に等しいといえる。

終

Q 3.

証明) Maxwell 方程式の右辺は、原点以外ではゼロになるから, (1.75)式は,

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi^L = 0 & -① \\ \phi'(r,\theta,t) = \dfrac{P_z e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{ik}{r} + \dfrac{1}{r^2}\right)\cos\theta \end{cases}$$

①式を変形し,

$$\nabla^2\phi = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad -②$$

②式の

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}}^{\,0} \quad -③$$

③式の第一項目は,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \frac{-P_z}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{ik\,e^{i(\omega t-kr)}(ikr+1) + e^{i(\omega t-kr)}\left(ik + \frac{2}{r}\right)\right\}\cos\theta$$

$$= \frac{-P_z}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}\left\{k^2e^{i(\omega t-kr)}(ikr+1) - k^2e^{i(\omega t-kr)} - ik\,e^{i(\omega t-kr)}\left(ik+\frac{2}{r}\right) - \frac{2}{r^2}e^{i(\omega t-kr)}\right\}\cos\theta$$

$$= \frac{-P_z}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{ik^3}{r}e^{i(\omega t-kr)} - \frac{ik}{r^2}e^{i(\omega t-kr)}\left(ik+\frac{2}{r}\right) - \frac{2}{r^4}e^{i(\omega t-kr)}\right\}\cos\theta$$

$$= \frac{-P_z}{4\pi\varepsilon}e^{i(\omega t-kr)}\left(\frac{ik^3}{r} + \frac{k^2}{r^2} - \frac{2ik}{r^3} - \frac{2}{r^4}\right)\cos\theta$$

③式の第二項目は,

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = -\frac{P_z e^{i(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\sin^2\theta$$

$$= -\frac{P_z e^{i(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= -\frac{P_z e^{i(\omega t-kr)}}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{ik}{r^3}+\frac{1}{r^4}\right)\cos\theta$$

よって、②式の左辺は、

$$(\text{左辺}) = \frac{-P_z}{4\pi\varepsilon} e^{i(\omega t - kr)} \left(\frac{ik^3}{r} + \frac{k^2}{r^2} \right) \cos\theta$$

②式の右辺は、

$$(\text{右辺}) = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \varepsilon\mu \cdot \frac{P_z}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \cos\theta \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i(\omega t - kr)}$$

$$= \frac{\mu P_z}{4\pi} \left(\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \cos\theta \cdot \left(-\omega^2 e^{i(\omega t - kr)} \right) \quad \cdots ④$$

ここで、$\omega^2 \mu = k^2 / \varepsilon$ を利用して、

$$(④) = -\frac{P_z}{4\pi\varepsilon} e^{i(\omega t - kr)} \left(\frac{ik^3}{r} + \frac{k^2}{r^2} \right) \cos\theta = (\text{左辺})$$

以上より、ϕは、Maxwell方程式を満たす。よって、ϕは確かにMaxwell方程式の解である。

終