教科書 p36 より

「$\sqrt{a+ib}$ を，実部と虚部に分かれた$\alpha+i\beta$の形に変形しなさい.」

解

$$\sqrt{a+bi}=\alpha+i\beta \tag{0}$$

から$\alpha$, $\beta$と $a$, $b$ の関係を求める．ここで，$\alpha$, $\beta$, $a$, $b$ は正の実数とする．

両辺二乗して

$$a+ib=\alpha^2+2i\alpha\beta-\beta^2 \tag{1}$$

これより

$$a=\alpha^2-\beta^2 \tag{2}$$

$$b=2\alpha\beta \tag{3}$$

という関係が求まり，後は$\alpha$, $\beta$を $a$, $b$ 陽関数の形であらわせばよい．(2)，(3)を二乗して

$$a^2=\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4 \tag{4}$$

$$b^2=4\alpha^2\beta^2 \tag{5}$$

(4)に少し特殊な変形をして

$$a^2=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2 \tag{6}$$

ここで，(6)に，(5)を代入して

$$a^2=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-b^2 \tag{7}$$

となる．(5)，(7)より，

$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2=a^2+b^2 \tag{8}$$

$$\alpha^2\beta^2=\frac{b^2}{4} \tag{9}$$

仮定より$\alpha$, $\beta$, $a$, $b$ は正の実数なので，(8)の平方根をとると

$$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{a^2+b^2} \tag{10}$$

を得る．ここで$\alpha^2$, $\beta^2$を解に持つ $x$ の二次方程式を考える．

$$\left(x-\alpha^2\right)\left(x-\beta^2\right)=0 \tag{11}$$

この方程式を展開し，(9)，(10)の関係を使い $a$, $b$ を定数に持つ方程式に書き直す．

$$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0 \tag{12}$$

$$x^2-\sqrt{a^2+b^2}\,x+\frac{b^2}{4}=0 \tag{13}$$

この方程式の二つの根が，$a$, $b$ で表された$\alpha^2$, $\beta^2$となるわけであるから，これを解く．二次方程式の解の公式を使い，

$$x=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\pm a}{2} \tag{14}$$

となり，この解のうちのどちらかが$\alpha^2$，どちらかが$\beta^2$となる．この判断は $b$=0 としたとき 0 にな

る方$\beta^2$とすれば良く，結局

$$\alpha = \left( \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \right)^{1/2} \tag{15}$$

$$\beta = \left( \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \right)^{1/2} \tag{16}$$

となる．ここで，$\sqrt{\alpha^2} \pm \alpha$，$\sqrt{\beta^2} \pm \beta$ のうち$\alpha$, $\beta$が正の実数になる方を採用することに注意する．

別解：

求める複素数を極座標表示で

$$\sqrt{a+ib}=\alpha+i\beta=r(\cos t+i\sin t) \tag{1}$$

とおくことができる．この $r$ は複素数平面における動径をあらわし，$t$ は偏角を表す．この式を両辺二乗してドモアブルの定理を用いると，

$$a+ib=r^2(\cos 2t+i\sin 2t) \tag{2}$$

となる．よって，

$$a=r^2\cos 2t \tag{3}$$

$$b=r^2\sin 2t \tag{4}$$

となる．ここで 2 倍角の定理を用いると(3)，(4)式は

$$a=r^2(\cos^2 t-\sin^2 t) \tag{5}$$

$$b=r^2 2\sin t\cos t \tag{6}$$

となる．ここで，$\cos t=0$ の場合を考えると，$t=\pi/2+n\pi$となり，$2t=\pi+2n\pi$となる．これは，$b=0$，すなわち実数ということになるので以降の計算では $\cos t=0$ の場合を除いて考える．すると(6)式は

$$\sin t=\frac{b}{2r^2\cos t} \tag{7}$$

と変形できる．この式を(5)式に代入して，

$$a=r^2\left(\cos^2 t-\frac{b^2}{4r^4\cos^2 t}\right) \tag{8}$$

となる．この式を整理すると

$$r^2\cos^4 t-a\cos^2 t-\frac{b^2}{4r^2}=0 \tag{9}$$

となる．この式から

$$\cos^2 t=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2r^2} \tag{10}$$

を得る．これを(5)に代入して

$$\sin^2 t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2r^2} \tag{11}$$

(12)

を得る．ここで $\cos^2 t > 0$ ，$\sin^2 t > 0$ の条件から複号のマイナスは棄却される．また，$a > 0$，$b > 0$ の条件から $\cos t > 0$ ，$\sin t > 0$ で，

$$\cos t = \frac{1}{r}\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^{1/2} \tag{13}$$

$$\sin t = \frac{1}{r}\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^{1/2} \tag{14}$$

となり，これを(2)式に代入すると

$$\alpha = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}\right)^{1/2} \tag{15}$$

$$\beta = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}\right)^{1/2} \tag{16}$$

を得る．