教科書 p36 より
「$\sqrt{a+ib}$ を，実部と虚部に分かれた$\alpha+i\beta$の形に変形しなさい.」

解

$$\sqrt{a+bi}=\alpha+i\beta \tag{0}$$

からα, βと a, b の関係を求める．ここで，α, β, a, b は正の実数とする．
両辺二乗して

$$a+ib=\alpha^2+2i\alpha\beta-\beta^2 \tag{1}$$

これより

$$a=\alpha^2-\beta^2 \tag{2}$$

$$b=2\alpha\beta \tag{3}$$

という関係が求まり，あとはこれをα, βについて解けばよい．まずβを消去する．

$$\beta=\frac{b}{2\alpha} \tag{4}$$

を(2)に代入し，

$$a=\alpha^2-\left(\frac{b}{2\alpha}\right)^2 \tag{5}$$

これはにα^2に関する二次方程式

$$\alpha^4-a\alpha^2-\frac{b^2}{4}=0 \tag{6}$$

で，解くと

$$\alpha^2=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{7}$$

を得る．$\alpha^2>0$ から複号のマイナスが棄却され，$\sqrt{\alpha^2}=\pm\alpha$ は$\alpha>0$ の条件から正の解を取る．従って，

$$\alpha=\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^{1/2} \tag{8}$$

を得る．これを(2)に代入すれば直ちに

$$\beta^2=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{9}$$

で，αと同様の条件から

$$\beta=\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^{1/2} \tag{10}$$

を得る．