

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_ 得点 \_\_\_\_\_

Q1: 質量  $m$  の物体を時刻ゼロで、初速度  $V$  で投げ上げる。初速度の方向は水平面から測って角度  $30^\circ$  である。重力加速度の大きさを  $g$  とする。以下の問に答えよ。

(1) 運動方程式  $m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g}$ , ただし  $\mathbf{g} = (0, -g)$  をデカルト座標の成分ごとに書き表せ(5×2=10).

$$x: m\ddot{x} = 0 \qquad y: m\ddot{y} = -mg$$

(2) 運動方程式を解きなさい。積分定数は  $x$  成分が  $C_1, C_2$ ,  $y$  成分が  $C_3, C_4$  とせよ(5×2=10).

$$x: x = C_1 t + C_2$$

$$y: y = -\frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4$$

(3) 投げ上げた瞬間の座標(3, 4)であった。  $x(t)$  を決定せよ(10).

$$t = 0 \text{ で } x = 3, \dot{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} V \text{ が初期条件. ここから } C_1, C_2 \text{ を求める.}$$

$$\dot{x} = C_1 \text{ より } \dot{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} V. \quad 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0 + C_2 \text{ から } C_2 = 3. \quad \text{答: } x = \frac{\sqrt{3}}{2} V t + 3.$$

(4) 同様に  $y(t)$  を決定せよ(10).

$$t = 0 \text{ で } y = 4, \dot{y} = \frac{V}{2} \text{ が初期条件. ここから } C_3, C_4 \text{ を求める.}$$

$$\dot{y} = -g t + C_3 \text{ より } C_3 = \frac{V}{2}. \quad 4 = -\frac{g}{2} \times 0^2 + \frac{V}{2} \times 0 + C_4 \text{ を解いて, } C_4 = 4.$$

$$\text{答: } y = -\frac{g}{2} t^2 + \frac{V}{2} t + 4.$$

(5) 最高点の座標を求めよ(10).

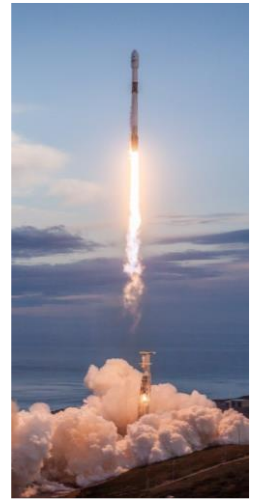
$$\text{最高点において } \dot{y} = 0. \text{ その時刻 } t_0 \text{ は } -g t_0 + \frac{V}{2} = 0 \text{ を満たす. 解いて } t_0 = \frac{V}{2g}. \quad x, y \text{ の}$$

$$\text{式に代入すれば座標は } \left( \frac{\sqrt{3} V^2}{4g} + 3, \frac{V^2}{8g} + 4 \right)$$

Q2: 宇宙ロケットは打ち上げ時に重力の6倍ほどのG(加速度)を感じるという。地球の重力を引けば、これはロケットが上向きに  $9.8 \times 5 \text{ [m/s}^2\text{]}$  で加速している証拠である。

(1) 加速度が一定のとき50秒後のロケットの速さを求めよ(10).

$v=at$ .  $9.8 \times 5 \times 50 = 2.5 \times 10^3 \text{ m/s}$ . 地上の音速の7倍ほど。しかし、これでも軌道速度には足りない。



(2) そのときロケットは射点からどれほどの距離にいるか求めよ(10).

$y = \frac{1}{2}at^2$ .  $0.5 \times 9.8 \times 5 \times 50^2 = 6.1 \times 10^4 \text{ m}$ . 「宇宙」は地上100kmより上と言われているから、真上に打ち上げてもまだ宇宙には届かない。

Q3: 極座標で  $\mathbf{r} = (R, \omega t + \theta)$  ( $\omega, \theta$ は定数)という等速円運動をする物体について考える

(1) 運動をデカルト座標で書き直しなさい(10).

$$x = R \cos(\omega t + \theta), \quad y = R \sin(\omega t + \theta)$$

(2) 加速度ベクトルを求めよ(10).

成分ごとに微分する。

$$\ddot{x} = -\omega^2 R \cos(\omega t + \theta), \quad \ddot{y} = -\omega^2 R \sin(\omega t + \theta)$$

(3) 加速度が円の中心に向くことを示しなさい(10). ※いくつか方法があるが、ここでは  $\ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{r}$  ( $k$ は負の定数)であることを示す。

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 R \{\cos(\omega t + \theta), \sin(\omega t + \theta)\}$$

$$\mathbf{r} = R \{\cos(\omega t + \theta), \sin(\omega t + \theta)\}$$

なので、 $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$ と表され、題意が示された。

※本問題は「日本語で論理が正しく記述できるか」が採点基準である。