「物理学演習 1」問題(03)　2024.04.25

学籍番号＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　得点＿＿＿＿＿

Q1: 質量 m の物体を時刻ゼロで，初速度 V で投げ上げる．初速度の方向は水平面から測って角度 30º である．重力加速度の大きさを g とする．以下の問に答えよ．

(1) 運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g}$，ただし $\boldsymbol{g} = (0, -g)$ をデカルト座標の成分ごとに書き表せ(5×2=10).

x: $m\ddot{x} = 0$　　y: $m\ddot{y} = -mg$

(2) 運動方程式を解きなさい．積分定数は x 成分が C_1, C_2, y 成分が C_3, C_4 とせよ(5×2=10).

x: $x = C_1 t + C_2$

y: $y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4$

(3) 投げ上げた瞬間の座標(3, 4)であった．$x(t)$を決定せよ(10).

$t = 0$で$x = 3$，$\dot{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}V$が初期条件．ここから C_1，C_2 を求める．

$\dot{x} = C_1$より$\dot{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}V$．$3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 0 + C_2$から$C_2 = 3$．答: $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}Vt + 3$.

(4) 同様に $y(t)$を決定せよ(10).

$t = 0$で$y = 4$，$\dot{y} = \dfrac{V}{2}$が初期条件．ここから C_3，C_4 を求める．

$\dot{y} = -gt + C_3$より$C_3 = \dfrac{V}{2}$．$4 = -\dfrac{g}{2} \times 0^2 + \dfrac{V}{2} \times 0 + C_4$を解いて，$C_4 = 4$.

答: $y = -\dfrac{g}{2}t^2 + \dfrac{V}{2}t + 4$.

(5) 最高点の座標を求めよ(10).

最高点において$\dot{y} = 0$．その時刻 t_0 は$-gt_0 + \dfrac{V}{2} = 0$を満たす．解いて$t_0 = \dfrac{V}{2g}$．x，yの式に代入すれば座標は$\left(\dfrac{\sqrt{3}V^2}{4g} + 3,\ \dfrac{V^2}{8g} + 4\right)$

Q2: 宇宙ロケットは打ち上げ時に重力の 6 倍ほどの G(加速度)を感じるという．地球の重力を引けば，これはロケットが上向きに 9.8×5 [m/s^2] で加速している証拠である．

(1) 加速度が一定のとき 50 秒後のロケットの速さを求めよ(10).

$v=at$． $9.8\times5\times50=2.5\times10^3$ m/s． 地上の音速の 7 倍ほど． しかし， これでも軌道速度には足りない．

(2) そのときロケットは射点からどれほどの距離にいるか求めよ(10).

$y=\dfrac{1}{2}at^2$． $0.5\times9.8\times5\times50^2=6.1\times10^4$ m. 「宇宙」は地上 100km より上と言われているから，真上に打ち上げてもまだ宇宙には届かない．

Q3: 極座標で$\boldsymbol{r}=(R,\omega t+\theta)$ $(\omega,\theta$は定数)という等速円運動をする物体について考える

(1) 運動をデカルト座標で書き直しなさい(10).

$x=R\cos(\omega t+\theta),\quad y=R\sin(\omega t+\theta)$

(2) 加速度ベクトルを求めよ(10).

成分ごとに微分する．

$\ddot{x}=-\omega^2R\cos(\omega t+\theta),\quad \ddot{y}=-\omega^2R\sin(\omega t+\theta)$

(3) 加速度が円の中心に向くことを示しなさい(10). ※いくつか方法があるが， ここでは $\ddot{\boldsymbol{r}}=k\boldsymbol{r}$ (kは負の定数)であることを示す．

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\omega^2R\{\cos(\omega t+\theta),\sin(\omega t+\theta)\}$$
$$\boldsymbol{r}=R\{\cos(\omega t+\theta),\sin(\omega t+\theta)\}$$

なので，$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\omega^2\boldsymbol{r}$と表され，題意が示された．

※本問題は「日本語で論理が正しく記述できるか」が採点基準である．