学籍番号______________ 氏名___________________________________ 得点____________

Q1: 質量 m の物体に一定の力 F を加えた．運動は x 軸に沿った 1 次元とする．

(1) 運動方程式を立てよ(10).

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F$$

(2) 一般解を求めよ(10).

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{F}{m}$ と変形，これは直接積分形だからチョロい．

$x=\dfrac{F}{2m}t^2+C_1t+C_2$ （C_1，C_2 は定数)

(3) $t=0$で物体はx_0にいるが速度は不明である．$t=t_0$の速度はv_0であった．物体の運動を決定せよ(10).

$t=0$ の初期条件を x の式に代入，$C_2=x_0$．$t=t_0$ の初期条件を $\dot{x}=\dfrac{F}{m}t+C_1$ に代入，$C_1=v_0-\dfrac{F}{m}t_0$ を得る．運動は $x=\dfrac{F}{2m}t^2+\left(v_0-\dfrac{F}{m}t_0\right)t+x_0$．

Q2: 粘性抵抗を受けつつ落下する質量mの物体の運動について考える．鉛直上向きにy軸を取り，重力加速度の大きさをgとする．

(1) 粘性抵抗力は速度vに比例し，$-kv$と書ける．物体に加わる合力を求めよ(5).

$-mg-kv$

(2) vを従属変数とした運動方程式を立てなさい(5).

$m\dot{v}=-mg-kv$

(3) 運動方程式を解き，一般解を求めなさい．積分定数を C とせよ(10).

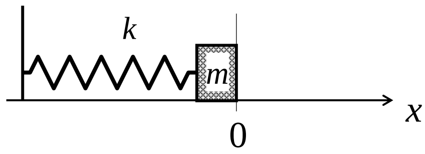
変数分離法を使って解く．$\dfrac{\mathrm{d}v}{v+(mg/k)}=-\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t$．解は $v=C\exp\left(-\dfrac{k}{m}t\right)-\dfrac{mg}{k}$．

(4) 充分な時間が経過したときの物体の速度を求めよ(10).

$v=C\exp\left(-\dfrac{k}{m}t\right)-\dfrac{mg}{k}$ の t に無限大を入れると $v_t=-\dfrac{mg}{k}$．これは初期条件によらない．

Q3: 以下の空欄を埋めなさい．**一重下線は数式・記号**，**二重下線は文字**が入る(5×4=20).

図のようなおもりとばねを組み合わせた系の運動を考える．おもりが受ける力はフックの



法則から $F=$ __$-kx$________**(符号に注意)**である．これに，ニュートンの運動の法則を組み合わせれば，運動方程式__$m\ddot{x}=-kx$__を得る．この微分方程式は分類すれば(4 つの単語で解答せよ)

2 階　　・定数係数・斉次　　・線形____________微分方程式である．計算を簡単にするために $\omega^2=k/m$ と置き換え，特性方程式を使って解けば，解は__$x=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}$____

(C_1，C_2 は定数)である．複素数の指数は三角関数に変換できるので，運動は原点まわりの振動運動とわかる．

Q4: ^{14}C は放射性元素で, 一定の確率で崩壊して ^{14}N に変わる. ここで崩壊確率を k とする.

(1) ^{14}C 元素の数の変化を表す微分方程式を立て，$t=0$ における ^{14}C の数が N_0 という初期条件の下で特殊解を求めなさい(10).

$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-kN$．解は暗記せよ．$N=Ce^{-kt}$．初期条件を代入すれば C が決まり，

答：$N=N_0e^{-kt}$

(2) いま，t の単位を「年」としても答は変わらない．^{14}C 崩壊の半減期は 5,730 年である．遺跡の木材に含まれる ^{14}C が天然に比べ 1/10 と測定された．これは，作られた後 ^{14}C が崩壊，減少して現在の値になったものと推定される．遺跡は何年前に作られたと推定されるか(10). ※ヒント：$N_0=1$ と考えれば(1)の解に当てはめるのは容易.

翻訳すれば「$\frac{N_0}{2}=N_0e^{-5730k}, \frac{N_0}{10}=N_0e^{-kt}$のときの t を求めよ」である．両辺をN_0で割り，対数を取れば$\ln 2=5730k$と$\ln 10=kt$を得る．kを消去して，$\ln 10=\frac{\ln 2}{5730}t$．計算すれば$t=$ 19,034年．有効数字を取れば 1 万 9 千年前.

問われているのは，最初の「翻訳する」能力であることを忘れずに.