「物理学演習 1」問題(07)　　　　　　　　　　　　　　　　　2024.05.30

学籍番号＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　得点＿＿＿＿＿＿

Q1: 以下の空欄を埋めなさい．一重下線は数式・記号，二重下線は文字が入る(5×4=20).

変数分離形の微分方程式は，標準形が$\underline{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X(x)Y(y)}$と書かれるタイプである．

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$を分数と考え，yを左辺に，xを右辺に分離，それぞれy，xで積分すれば解ける．変数を分離するのには一定のコツがある．たとえば，$y' + y = 1$は$\underline{\frac{\mathrm{d}y}{-y+1} = \mathrm{d}x}$と変数分離されるが，よく似た$y' + x = 1$は$\underline{\mathrm{d}y = (-x+1)\mathrm{d}x}$と変数分離され，一方，これもよく似た $y' + xy = 1$ は変数分離できない．変数分離で微分方程式を解くと，解はしばしば陰関数の形で得られるが，可能な限り陽関数に変形すること．

Q2: 以下の微分方程式を変数分離せよ．微分方程式は**解かないこと**(5×2=10).

(1) $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg + Bv^2$

$$\frac{m}{B}\frac{\mathrm{d}v}{v^2 - mg/B} = \mathrm{d}t$$

(2) $A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + B(xy)^2 = 0$

$$-\frac{A}{B}\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x^2\mathrm{d}x$$

Q3: 以下の微分方程式の一般解を求めよ．陽関数の形で解答すること(10×2=20).

(1) $y' = (xy)^2$

$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x^2\mathrm{d}x$　　$\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x^2\mathrm{d}x$　　$-y^{-1} = \frac{x^3}{3} + C'$

答：$y = -\frac{3}{x^3 + C}$　(C は任意の定数)

(2) $y' + 2xy = 0$

$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -2x\mathrm{d}x$　　$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int 2x\mathrm{d}x$　　$\ln|y| = -x^2 + C$

答：$y = Ce^{-x^2}$　(C は任意の定数)

Q4: 一定のパワーPのエンジンで加速する自動車の速度変化は，公式$P=Fv$を使い，運動方程式は$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{P}{v}$と書ける．ただし$m$は質量，$v$は速度である．以下の問に答えよ．

(1) 運動方程式を解き，一般解を求めよ(10)

$$v\mathrm{d}v=\frac{P}{m}\mathrm{d}t \qquad \int v\mathrm{d}v=\int\frac{P}{m}\mathrm{d}t \qquad \frac{1}{2}v^2=\frac{P}{m}t+C$$

答：$v=\sqrt{\dfrac{2P}{m}t+C}$　(Cは任意の定数)

(2) 運動をx軸に沿った1次元とする．時刻ゼロで自動車は$x=0$におり，$\dot{x}=0$であった．運動は$x\geq 0$の範囲で起こるとする．運動を決定せよ(10)．ヒント：$t=0$で$\dot{x}=0$なので，まず$v(t)$の任意定数をゼロと置く．

初期条件から$v=\sqrt{\dfrac{2P}{m}t}$．tで積分して一般解は$x=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2P}{m}}t^{3/2}+C_2$で，$x$の初期条件から$C_2=0$．答：$x=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2P}{m}}t^{3/2}$

Q5: ロジスティック方程式$\dot{y}=A\left(1-\dfrac{y}{B}\right)y$ (A，Bは定数)を以下の手順で解く．

(1) 下線の数式を答えよ(10).

括弧を外し，y^2で割れば$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{y^2}=A\dfrac{1}{y}-\dfrac{A}{B}$になり，$u=\frac{1}{y},\dot{u}=-\frac{1}{y^2}\dot{y}$を使い変形すれば，

$-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=$　$Au-\dfrac{A}{B}$　を得る．

(2) uを求めよ(10).

$$-\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}u}{u-\frac{1}{B}}=\mathrm{d}t \quad\rightarrow\quad \int\frac{\mathrm{d}u}{u-\frac{1}{B}}=\int -A\mathrm{d}t \quad\rightarrow\quad u=Ce^{-At}+\frac{1}{B}$$ (Cは任意の定数).

(3) 時刻ゼロで$y=B$であった．yを求めよ(10).

$y=\left(Ce^{-At}+\dfrac{1}{B}\right)^{-1}$　$t=0$で$\left(C+\dfrac{1}{B}\right)^{-1}=B$より$C=0$.

答：$y=B$