

学籍番号 _____ 氏名 _____ 得点 _____

※指定が無い限り、重力加速度の大きさを g とせよ。

Q1: 速度に比例する抵抗を受けながら落下する質量 m の物体の運動を解析する。運動は 1 次元で、鉛直上向きに y 軸を取り、抵抗は以下の式で表されるとする。

$$R = -\gamma \dot{y} \quad R: \text{抵抗力} \quad \gamma: \text{抵抗係数}$$

(1) 運動方程式を立てなさい(10).

$$m\ddot{y} = -mg - \gamma\dot{y}$$

(2) $t=0$ で物体を静かに離した。 $v(t)$ を定めよ(10).

$$\text{一般解は } v(t) = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma}. \text{ 初期条件を代入, } v(t) = \frac{mg}{\gamma} \left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1 \right)$$

(3) 充分時間が経った後の速度、「終端速度」 v_t を求めよ(10).

$$t \text{ が充分大きい時, } e^{-\frac{\gamma}{m}t} \rightarrow 0 \quad v_t = -\frac{mg}{\gamma}$$

(4) $m/\gamma = \tau$ は時間の次元を持ち、これを「時定数」と呼ぶ。物体の速度が終端速度の 99% に達するには時定数の何倍の時間が必要か。有効数字 2 桁で解答せよ(10).

問題が何を問うているかということ、 $\frac{v}{v_t} = 0.99 = -(e^{-t/\tau} - 1)$ となる t/τ を求めよということ。

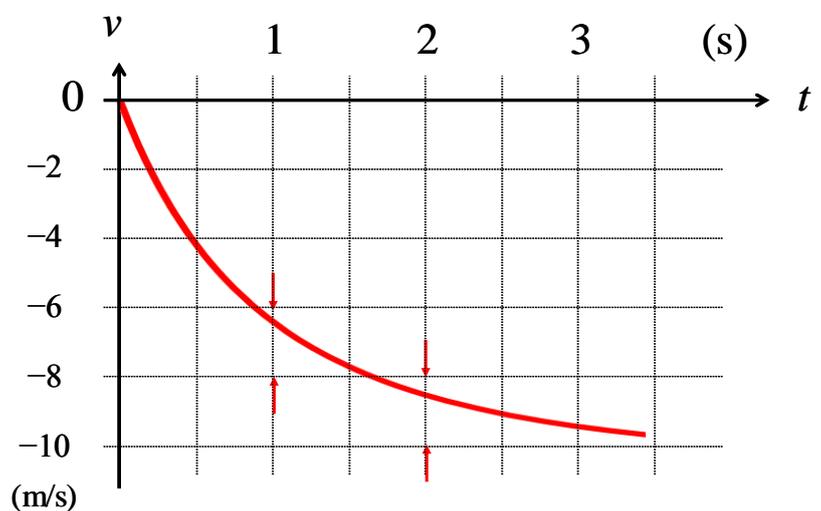
$\ln(0.01) = -t/\tau$ と変形できて、答は 4.6 倍。

(5) ここで、 $\tau = 1.0 \text{ s}$ と仮定する。

$g = 10 \text{ m/s}^2$ の近似値を使い、 v の時間変化を「正確に」グラフに表しなさい(10).

時刻 1, 2, 3 秒くらいの v を計算して、およその見当をつけること。

v が右図のゲートの範囲に入っていない解は 5 点減点。



Q2: パラシュートの落下は慣性領域の近似が成り立ち、運動方程式は上向きを正として

$$m\dot{v} = -mg + \beta S \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \beta: \text{空気抵抗係数} \quad S: \text{パラシュートの断面積} \quad \rho: \text{空気の密度}$$

である。

(1) 空気抵抗係数 β の次元(単位)を答えよ(10).

$S[\text{m}^2]\rho[\text{kg}/\text{m}^3]v^2[\text{m}^2/\text{s}^2]$ を掛けると $[\text{kgm}/\text{s}^2]$ となる。これは力の次元 $[\text{N}]$ である。微分方程式の各項は力の次元なので、 β は無次元となる。

(2) 終端速度 v_t を求めよ(10).

(3) $mg = \beta S \frac{1}{2} \rho v^2$ を変形し、 $v = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho\beta S}}$.

(4) 多くの物体で $\beta=1$ が良い近似である。スカイダイバーの体重を 60kg 、重力加速度の大きさを $9.8\text{m}/\text{s}^2$ 、空気の密度を $1.3\text{kg}/\text{m}^3$ として、終端速度が $2.0\text{m}/\text{s}$ となるパラシュートの直径を求めよ。ただしパラシュートは下から見て円形とする(10).

$v = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho\beta S}}$ を S について解き、 $S = \frac{2mg}{\rho\beta v^2}$. 値を代

入し、 $S=226\text{m}^2$. $S=\pi D^2/4$ から $D=17\text{m}$ である。本物もやはりこれくらいの大きさ。

(5) パラシュートは、時刻 0 、速度 $-v_0$ で開き、終端速度 $-v_t$ までスカイダイバーを減速させる。時刻と速度の関係を右のグラフに示す。時刻 0 の加速度は $+g$ であった。重力加速度の大きさを g 、ダイバーの質量を m として、ダイバーの加速度 a 、ダイバーに働く紐の張力 T をそれぞれグラフに書き込みなさい。速度のグラフにならって、縦軸に値を記入せよ(10×2=20).

加速度は常に正。 $+g$ から徐々に減少、ゼロになる。張力は $2mg$ でスタート、終端速度のときに重力と釣り合い mg となる。

