学籍番号＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　得点＿＿＿＿＿＿

Q1: 1m あたり光強度がα減衰する光がある.

(1) 光強度 I の変化を表す微分方程式を立てなさい(10).

$I' = -\alpha I$

(2) 一般解を求めなさい(10).

$I = Ce^{-\alpha x}$ (C は定数)

(3) 同じ入射光I_0のときの長さl_1と長さl_2の光ファイバーの射出パワーを測定したところ, 長さl_1のときはI_1, 長さl_2のときはI_2であった. αを問に与えられた量で表しなさい(10).

$I_1 = I_0 e^{-\alpha l_1}$, $I_2 = I_0 e^{-\alpha l_2}$. 辺々割り算すれば, $\frac{I_2}{I_1} = e^{-\alpha(l_2-l_1)}$. 両辺の対数を取り，変形する. 答：$\alpha = \ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right)/(l_1 - l_2)$

Q2: 湖の透明度は, 「湖に沈めた測定用の白い円盤が見えなくなる距離 L[m]」で定義される. 透明度 L と減衰定数αの間には L=1.9/αという近似が成り立つ. 透明度が 40m である湖について以下の問題に答えよ.

(1) 湖水の減衰距離を求めよ(10).

減衰距離x_0は$x_0 = 1/\alpha$であるので, $x_0 = 1/\alpha = L/1.9 = 21\mathrm{m}$

(2) 「見えなくなる」と認定される光の強度は, 元の強度I_0を基準にして何%か. ここで, 光線は湖面から広がらずに一往復するとして, 円盤の反射率を 1 とする(10).

湖面から円盤までの距離を L とする. 光は湖面から円盤まで進み、反射して戻ってくるため、一往復するため,総距離は 2L

$I(2L) = I_0 e^{-\alpha 2L} = I_0 e^{-(1.9/L)2L} = I_0 e^{-1.9\times 2} = I_0 \times 0.0223 \cdots$より,

答え: 2.2%

Q3: ニュートンの冷却の法則の微分方程式は以下のとおりである．T_{m}は周囲の温度，τは時定数である．

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}(T - T_{\mathrm{m}})$$

(1) 微分方程式の一般解を求めよ．ただし，解法として変数分離法を用いよ．途中式が間違っている場合は不正解とする(10).

変数分離すれば$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_{\mathrm{m}}} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau}$．積分して，$\ln|T - T_{\mathrm{m}}| = -\frac{t}{\tau} + C$．指数を取り，

$T - T_{\mathrm{m}} = Ce^{-(t/\tau)}$　　答：$T = Ce^{-(t/\tau)} + T_{\mathrm{m}}$（$C$は定数)

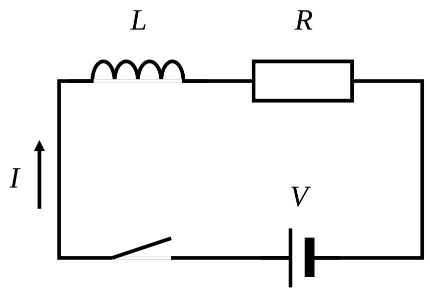
(2) 微分方程式の一般解を求めよ．ただし，解法として$T' = T - T_{\mathrm{m}}$の変数変換を用いよ．途中式が間違っている場合は不正解とする(10).

変数変換により$T' = T - T_m$，また$\dot{T}' = \dot{T}$だから，$\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}t} = -\frac{T'}{\tau}$．これは斉次系だから直ちに解は$T' = Ce^{-(t/\tau)}$．$T'$を$T$に逆変換，移項すれば　　答：$T = Ce^{-(t/\tau)} + T_{\mathrm{m}}$（$C$は定数)

(3) τを 2000 s，周囲の温度(T_{m})を 20 ℃とする．はじめ 100 ℃だったお湯が 30 ℃になるまでかかる時間を求めよ (10).

$T' = Ce^{-(t/\tau)}$のままで計算した方が楽．$T'(0) = 80$，$T'(t_0) = 10$のときのt_0を求めよ，という問題になる．答：4.2×10^3 s (約 1.2 時間)

Q4: 図のような RL 直列回路に図のような直流電源を接続し, 時刻ゼロでスイッチを入れる．以下の問いに答えよ．



(1) コイル両端電圧は$V_{\mathrm{L}} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$と書ける．電流 I を従属変数とした微分方程式を立てなさい(10).

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR = V$$

(2) 充分時間が経過した後のV_{L}を求めなさい(10).

微分方程式の特殊解を求めればよい．$I = \frac{V}{R}$で定数．したがって，$V_{\mathrm{L}} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$．電気回路を習った人なら，計算しなくてもわかる問題．