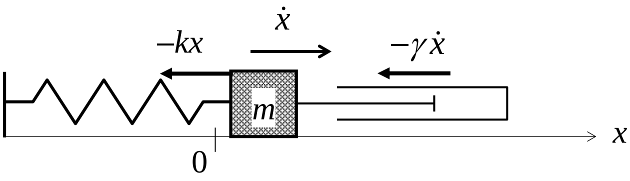
学籍番号＿＿＿＿＿＿＿ 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 得点＿＿＿＿＿＿

Q1: ばね定数 k のばねにつながれた質量 m のおもりに，速度に比例する抵抗力が働く一次元の運動を考える．バネの自然長からの伸びを x，粘性抵抗力を$-\gamma\dot{x}$ （γ は正の比例定数)とする．以降の計算を容易にするため，$2\kappa=\gamma/m$，$\omega_0^2=k/m$の置き換えを行う．以降は，κ，ω_0を使い解答すること．



(1) 特性方程式を立て，その根を求めよ(10).

特性方程式は$\lambda^2+2\kappa\lambda+\omega_0^2=0$で，根の公式を使い$\lambda=-\kappa\pm\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}$.

(2) $\omega_0{}^2=\frac{3}{4}\kappa^2$ の場合の運動方程式の一般解を求めよ．任意定数を C_1，C_2とする(10).

$\lambda_1=-\frac{\kappa}{2}$，$\lambda_2=-\frac{3\kappa}{2}$ だから，$x(t)=C_1e^{-\kappa t/2}+C_2e^{-3\kappa t/2}$.

(3) $\kappa^2-\omega_0{}^2<0$ の場合，特性方程式の根は 2 つの共役複素数となる．いま，$\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2}$を$\omega$と置く．

運動方程式の一般解を，**三角関数を使って**表わせ．任意定数を A，B とする(10).

$$x(t)=C_1e^{-\kappa t+i\omega t}+C_2e^{-\kappa t-i\omega t}=e^{-\kappa t}\{C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}\}$$

$$x(t)=e^{-\kappa t}\{(C_1+C_2)\cos(\omega t)+i(C_1-C_2)\sin(\omega t)\}$$

ここで，$(C_1+C_2)=A$，$i(C_1-C_2)=B$と置けば，

$$x(t)=e^{-\kappa t}\{A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\}$$

(4) いま，$\omega_0\gg\kappa$の場合を考える．初期条件を$t=0$で$x=X_0$，$\dot{x}=0$とする．運動が $x=X_0e^{-\kappa t}\cos(\omega_0 t)$ と近似されることを示しなさい(10).

$\omega_0\gg\kappa$の条件から，$\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2}\sim\omega_0$で，運動方程式の一般解は

$x(t)=e^{-\kappa t}\{A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\}$となる．一回微分して

$\dot{x}(t)=-\kappa e^{-\kappa t}\{A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\}+\omega_0e^{-\kappa t}\{-A\sin(\omega_0 t)+B\cos(\omega_0 t)\}$となる．

時刻ゼロの条件を代入すれば，$A=X_0$，$B=X_0\frac{\kappa}{\omega_0}$を得る．ここで，$\omega_0\gg\kappa$だから，$B\sim 0$

と置けて，$x=X_0e^{-\kappa t}\cos(\omega_0 t)$を得る．

(5) (4)の条件の下で，運動のおよその形が分かるグラフを右に描きなさい t 軸上，×点を通るように描くこと. (10).

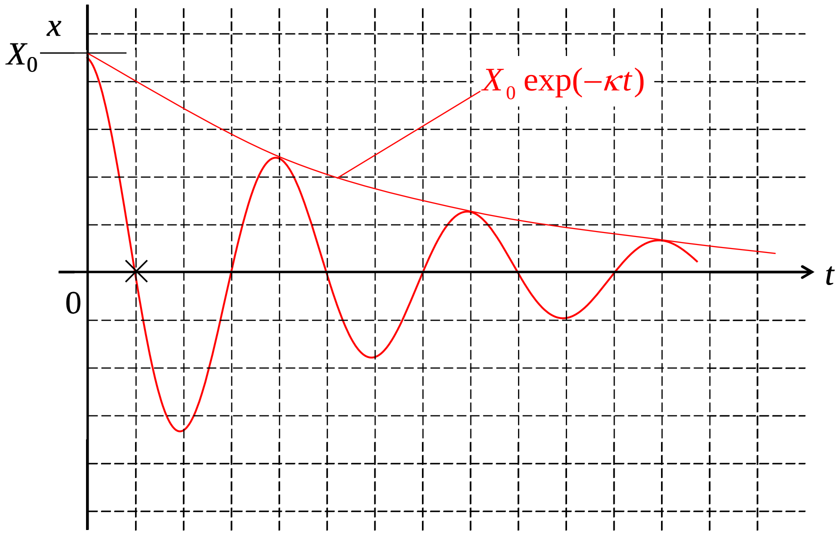
おおよそ右図のとおり．正解のポイントは

(1) t=0 で x=X_0

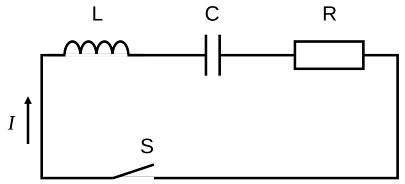
(2) 減衰振動であること

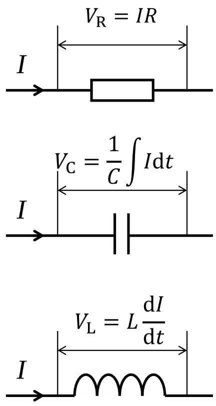
(3) 周期が一定であること

部分点は 5 点.



Q2: 図のような LCR 直列回路がある.





(1) 回路に流れる電流 I を従属変数として，微分方程式を立てなさい(10).

$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR + \frac{1}{C}\int I\mathrm{d}t = 0$微分して，

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = 0$$

(2) 解が振動解になる条件を “$C <$ …”の形の不等式で示しなさい(10).

$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{LC} = 0$．$2\kappa = \frac{R}{L}$，$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$の置き換えを行う．解が振動解になる条件は$\omega_0^2 > \kappa^2$

だから，回路素子に直すと$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$．$L$ が両辺にあるので除して，$C < \frac{4L}{R^2}$.

(3) 回路定数を振動解になるよう選ぶ．コンデンサーに電荷を与え，時刻ゼロでスイッチを閉じると電流は減衰振動する．電流の減衰定数と角振動数をそれぞれ求めよ(10).

減衰定数は$\kappa = R/(2L)$．角振動数は$\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$.

(4) この回路は Q1 のばねとおもりの系のシミュレーターとして使える．L，C，R に相当するのは Q1 の図のそれぞれ何に相当するか答えよ(10).

κ，ω_0^2をそれぞれ何で置き換えたかを比較．$L = m$，$R = \gamma$，$k = 1/C$.

(5) 回路定数を臨界減衰になるよう選ぶ．時刻ゼロの電流をゼロ，電流の変化率をαとするとき，その後回路に流れる電流を答えよ．減衰定数κを使い答えること(10).

$I = (C_1 + C_2 t)e^{-\kappa t}$．$t = 0$で$I = 0$から$C_1 = 0$．$\dot{I} = C_2(e^{-\kappa t} - \kappa t e^{-\kappa t})$．$t = 0$で$\dot{I} = \alpha$から$C_2 = \alpha$．答：$I = \alpha t e^{-\kappa t}$.