学籍番号＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　得点＿＿＿＿＿＿

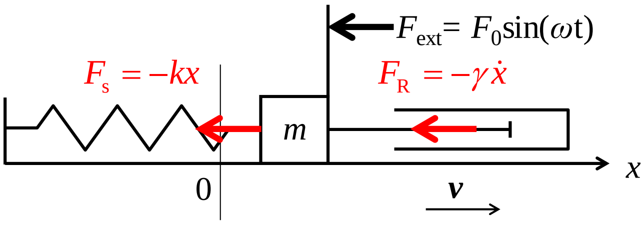
Q1: 以下の空欄を埋めなさい．**一重下線は数式・記号**，**二重下線は文字**が入る(5×6=30).

下図のようにばね，おもり，ダンパーからなる系に，周期的な外力を与える．運動は初期条件に依存し減衰する＿過渡＿項と，初期条件に依存せず永続する＿定常＿項の和で表される．ダンパーがばねに比べ弱いとき，ω が＿$\sqrt{k/m}$＿に近いと運動の振幅が大きくなる．これを＿共振＿という．ときとして振幅が破壊につながるほど大きくなり，危険である．外力のωが一定のとき，これを避けるための方法として

- ＿おもりを追加する＿
- ＿ダンパーを強くする＿

などが考えられる(**変数でなく，具体的に「何」を「どうする」かで答えよ**).

Q2: 右図のような，周期的な外力が働くおもりの運動を解析する．



(1) 運動方程式を書きなさい(10).

$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0\sin(\omega t)$

以降は$2\kappa = \gamma/m$，$\omega_0^2 = k/m$と置き直し，運動を解析する．解答もκ，ω_0を使うこと．

(2) 以下の手順で非斉次形の特殊解を求めよ(10).

定常解を$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$と仮定．微分方程式に代入．sin，cos で整理すると，

$(\omega_0^2 - \omega^2)A + 2B\kappa\omega = 0$，$(\omega_0^2 - \omega^2)B - 2A\kappa\omega = \frac{F_0}{m}$を得る．解いて，(以下)

以下の表式を得る．$A = \frac{F_0}{m}\frac{-2\kappa\omega}{4\kappa^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$，$B = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{4\kappa^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$

ゆえに特殊解は$x_s(t) = \frac{F_0/m}{4\kappa^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}\{-2\kappa\omega\cos(\omega t) + (\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t)\}$

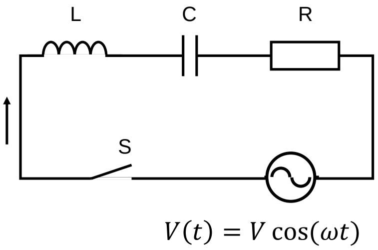
(3) 定常振動状態のおもりの振幅を求めよ(10).

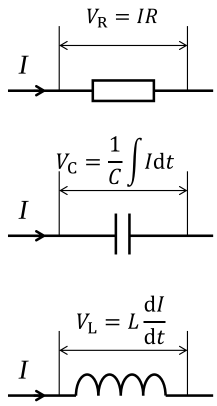
$R=\sqrt{A^2+B^2}$を適用． $R=\frac{F_0/m}{4\kappa^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\sqrt{4\kappa^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}=\frac{F_0/m}{\sqrt{4\kappa^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}$

(4) ω_0が一定のとき，$\frac{2\kappa}{\omega_0}=0.01$のときの最大振幅は$\frac{2\kappa}{\omega_0}=0.1$の何倍になるか(10).

共振状態は$\omega_0=\omega$なので，$R=\frac{F_0/m}{2\kappa\omega_0}$. したがって，振幅は$\kappa$に反比例．答は 10 倍.

Q3: 図のような LCR 直列回路を交流電源で駆動する.





(1) 電流 I を従属変数として，微分方程式を立てなさい(10).

$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{1}{C}\int I\mathrm{d}t=V\cos(\omega t)$. t で一回微分,

$L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=-\omega V\sin(\omega t)$.

(2) $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$, $\frac{R}{L}=2\kappa$と置きなおし，Q2(2)と(3)の結果を使い，定常振動状態の電流の振幅を求めよ．また，共鳴が起きたときの電流の振幅を求めよ．以降はω_0, κを使い解答のこと(5×2=10).

Q2(2)と比較すると$A=\frac{V}{L}\frac{2\kappa\omega^2}{4\kappa^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}, B=-\frac{V}{L}\frac{\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{4\kappa^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}$.

$I_0=\sqrt{A^2+B^2}$を適用． $I_0=\frac{\omega V/L}{4\kappa^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\sqrt{4\kappa^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}=\frac{\omega V/L}{\sqrt{4\kappa^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}$

共振状態は$\omega_0=\omega$なので，$I_P=\frac{V}{2\kappa L}$.

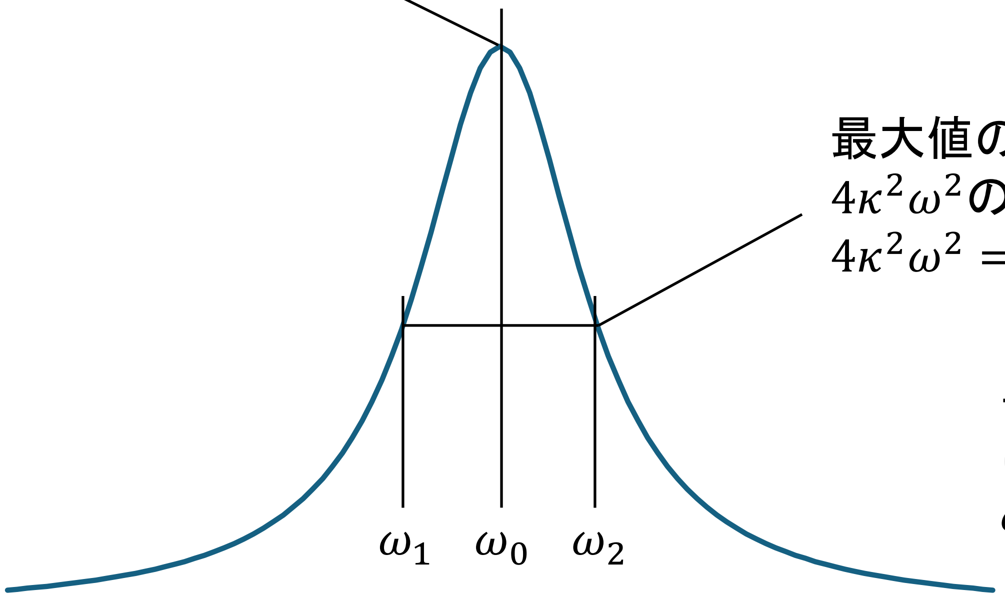
(3) 共振器に蓄えられるエネルギーがピークの 1/2 になる 2 つの周波数の差を共振器の共振半値全幅$\Delta\omega$と呼ぶ．共振半値全幅$\Delta\omega$を求めよ． ※LCR 共振器に蓄えられるエネルギーは電流振幅の 2 乗で与えられる(10).

2 つの周波数をそれぞれω_1とω_2とする($\omega_1>0$, $\omega_2>0, \omega_2>\omega_1$). $\frac{I_{FWHM}}{I_P}=\frac{1}{\sqrt{2}}$より,

$\omega_0^2-\omega_1^2=2\kappa\omega$, $\omega_0^2-\omega_2^2=-2\kappa\omega$ を得る．よって，$\omega_1=-\kappa+\sqrt{\kappa^2+\omega_0^2}$, $\omega_2=\kappa+\sqrt{\kappa^2+\omega_0^2}$である．$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1=2\kappa$.

$$I = \frac{\omega V/L}{\sqrt{4\kappa^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

最大値：分母は$\sqrt{4\kappa^2\omega^2 + 0}$



最大値の$1/\sqrt{2}$になるためには$4\kappa^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2$が$4\kappa^2\omega^2$の2倍になればよいことがわかる．したがって，

$4\kappa^2\omega^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2$

平方根を取れば，$2\kappa\omega = \pm(\omega_0^2 - \omega^2)$．ここで復号は，それぞれ$\omega_0$の右側と左側の点に対応する．$\omega_0$より小さい方を$\omega_1$，大きい方を$\omega_2$とする．

$2\kappa\omega_1 = \omega_0^2 - \omega_1^2$を解いて，$\omega_1 = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + \omega_0^2.}$ $\omega > 0$の要請から負号がとれ，$\omega_1 = -\kappa + \sqrt{\kappa^2 + \omega_0^2.}$

$2\kappa\omega_2 = -\omega_0^2 + \omega_2^2$を解いて，$\omega_2 = \kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + \omega_0^2.}$ $\omega > 0$の要請から負号がとれ，$\omega_2 = \kappa + \sqrt{\kappa^2 + \omega_0^2.}$

$$\Delta\omega = \left[\kappa + \sqrt{\kappa^2 + \omega_0^2.}\ \right] - \left[-\kappa + \sqrt{\kappa^2 + \omega_0^2}\right] = 2\kappa$$