物理学演習 1　今日の One point

第 5 回講義

➢ **微積分の基本公式**

1. べき関数：　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$　　$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

2. 指数関数：　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{ax} = ae^{ax}$　　$\int ae^{ax}\mathrm{d}x = e^{ax} + C$

3. 対数：　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(ax+b) = a\frac{1}{ax+b}$　　$\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|x+b/a| + C$

4. 三角関数：　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(ax) = a\cos(ax)$　　$\int \sin(ax)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$

　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(ax) = -a\sin(ax)$　　$\int \cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$

➢ **直接積分形**: $y^{(n)} = f(x)$ と書き直せる形の微分方程式．この形なら，両辺を $n$ 回積分するだけで解ける．

➢ **変数分離形**：一般的表現は $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X(x)Y(y)$ で，以下の特徴を持つ微分方程式．

1. **1 階**微分方程式
2. $y'$を $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ と書き直して分数の様に扱うとき，$y$ を含む項をすべて左辺に，$x$ を含む項をすべて右辺に移項できる．

➢ **変数分離法による微分方程式の解法**：例として $y' = xy$ を取り上げる．

1. 変数分離する．$\frac{\mathrm{d}y}{y} = x\mathrm{d}x$

2. 左辺を $y$ で，右辺を $x$ で積分する．$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int x\mathrm{d}x \quad \rightarrow \quad \ln|y| + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2$ .

　※ここで，**任意定数は 1 つにまとめること.**

3. これで，微分方程式は「解けた」ことになるが，可能な限り陽関数 $y = f(x)$に変形する．この場合，両辺の指数をとる．$|y| = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\exp(C')$ .

4. 左辺の絶対値を外して，代わりに右辺の任意定数を$\pm\exp(C')$とする．これも任意定数だから $C$ と置き直し，$y = C\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$が最終結果.

　**※この変形は憶える**：$\ln|y| = x + C' \quad \rightarrow \quad y = Ce^x$

➢ **階数の引き下げ**：$y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} = f(x)$ の微分方程式．すなわち $n$ 階微分と$(n-1)$階微分のみからなる**線形**微分方程式．この場合，$y^{(n-1)}$を変数 $u$ とすれば変数分離形．解いた後，$(n-1)$回積分すれば $y$ を得る．