物理学演習 1　今日の One point

第 7 回講義

- **変数分離形**：一般的表現は$\dfrac{dy}{dx}=X(x)Y(y)$で，文章で書けば以下の特徴を持つ微分方程式.
  1. 1 階微分方程式
  2. y'を$\dfrac{dy}{dx}$と書き直して分数の様に扱うとき，yを含む項をすべて左辺に，xを含む項をすべて右辺に移項できる.
  3. xを含まない 1 階微分方程式は，とりあえず変数分離可能と考えて挑戦しよう.

- **変数分離法による微分方程式の解法**：例として$y'=xy$を取り上げる.

  1. 変数分離する．$\dfrac{dy}{y}=x dx$
  2. 左辺をyで，右辺をxで積分する．$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int x dx \quad\rightarrow\quad \ln|y|+C_1=\frac{x^2}{2}+C_2$.

     ※ここで，**任意定数は 1 つにまとめること.**
  3. これで，微分方程式は「解けた」ことになるが，可能な限り陽関数$y=f(x)$に変形する．この場合，両辺の指数をとる．$|y|=\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\exp(C')$.
  4. 左辺の絶対値を取って，代わりに右辺の任意定数を$\pm\exp(C')$とする．これも任意定数だからCと置き直し，$y=C\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$が最終結果.

- **この変形は憶える**：$\ln|y|=x+C' \quad\rightarrow\quad y=Ce^x$

- **ベルヌーイ型微分方程式**：$y'+p(x)y=q(x)y^n$　非線形だが，以下の方法で線形化可能

  (1) 両辺をy^nで割る.
  (2) $u=y^{1-n}$と置く.
  (3) $u'=(1-n)y^{-n}y'$だから，$\dfrac{1}{1-n}u'+p(x)u=q(x)$

  更に，$p(x)$，$q(x)$が定数の場合，xを含まない 1 階微分方程式だから，これは変数分離可能.

- **ロジスティック方程式**：$y'=k_0\left(1-\dfrac{y}{K}\right)y$　2 次のベルヌーイ型微分方程式．両辺をy^2で割り，$u=y^{-1}$を使えば線形化可能.