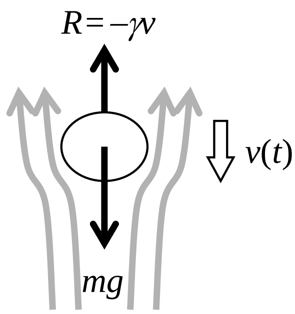
第 8 回講義

- 抵抗のある流体(水中, 空気中)の落下運動は一般に $m\dot{v}=-mg-Av+Bv^2$ の形の微分方程式で表される．しかし多くの場合，
  1. 粘性抵抗(A)が慣性抵抗(B)よりはるかに大きい → 粘性領域.
  2. 粘性抵抗(A)が慣性抵抗(B)よりはるかに小さい → 慣性領域.

  のどちらかと考えてよい.

- 粘性領域の運動方程式：$m\dot{v}=-mg-\gamma v$　これは，「1 階定数係数線形**非斉次**線形微分方程式」である．座標軸をどっち向きにとっても, v の項にはマイナスがつくので注意. 解き方は以下の通り.



  i. まず，対応する「1 階線形**斉次**線形微分方程式」 $m\dot{v}+\gamma v=0$ の一般解を求める．特性方程式の根を求めるのが正当なやり方だが，ここは以下の事実を暗記する.

  微分方程式 $\dot{v}+kv=0$ の一般解は $v=Ce^{-kt}$　(C は定数).

  簡単でしょ？　これが正しいことは，1 回微分してみればわかる.

  ii. 次に，非斉次形 $m\dot{v}=-mg-\gamma v$ の解をなにか一つ見つける．斉次形に定数($-mg$)が加わっただけのとき，非斉次形の解の一つが定数である可能性が高い．一回微分してゼロなのだから，$v=-\dfrac{mg}{\gamma}$ を試す．$m\dot{v}=-mg-\gamma v$ はたしかに，両辺がゼロとなり，これが解の一つとわかる.

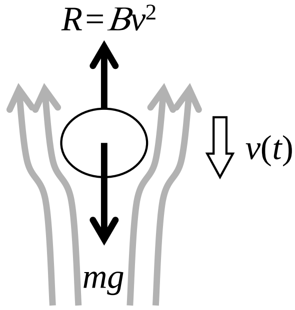
  iii. 最後に，斉次形の一般解と非斉次形の特殊解を足し，できあがり.

  $$v=Ce^{-kt}-\frac{mg}{\gamma}$$

  (C は定数)．あとはいつものように初期条件から C を決める.

- 微分方程式の特殊解は**終端速度** v_t である．どんな初期条件でスタートしても，最後に物体は終端速度で落下する.

- 慣性領域の運動方程式：$m\dot{v}=-mg+Bv^2$　これは，「**非線形微分方程式**」である．非線形の微分方程式は多くの場合，解析解がない．今の場合は，たまたま解析解が存在するが，解けなくても良いし，答を覚える必要もない.
  ※微分方程式が v^2 を含むため，v の符号が変わると方程式も変わるので注意.



- 解けないが，**終端速度** v_t は容易に求められる．速度の変化がゼロの条件から，微分方程式の左辺はゼロで，変形すれば

$$v_t=\sqrt{\frac{mg}{B}} \tag{1}$$

とわかる.