

物理学演習 1 今日の One point

第 12 回講義

- 1 階定数係数斉次線形微分方程式は、 $y' + ky = 0$ と書き直せる形の微分方程式である。
- この微分方程式の一般解は $y = Ce^{-kx}$ (C は任意定数)である。
 ※答えを暗記する。特性方程式とか、面倒なことをしない。
 ※この世の多くの物理がこの法則に従う。

- 放射性元素の崩壊：1 個の原子が毎秒崩壊する確率は一定。これを k とする。 N 個の原子があるとき、毎秒崩壊する原子数は kN で表されるから、原子数の変化は

$$\dot{N} = -kN \quad (1)$$
 と表される。

- 原子数の変化は $N = N_0 e^{-kt}$ である。 k の逆数は**時定数**[s]で、原子が崩壊してなくなるまでどの程度かかるかの目安となる。 **半減期** $T_{1/2}$ は原子核物理の分野で使われる目安で、時定数との関係は

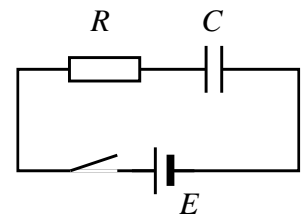
$$T_{1/2} = -\tau \ln\left(\frac{1}{2}\right) \sim 0.69\tau \quad (2)$$

- 1 階定数係数非斉次線形微分方程式は、 $y' + ky = f(x)$ と書き直せる形の微分方程式である。
- 解法は 2 通り。 **変数分離**するか、 **特性方程式**を使うか。特性方程式をお勧めする。
- **RC 直列回路と直流電源**：独立変数は t 。抵抗とコンデンサーの両端の電圧は

$$V_R = IR \quad V_C = \frac{Q}{C}$$

- $I = \frac{dQ}{dt}$ を使い、 $V_C = \frac{1}{C} \int Idt$
- キルヒホッフの法則： $E + V_C + V_R = 0$ 。
- V_C に関する微分方程式は、

$$\dot{Q}R + \frac{Q}{C} = E \quad (3)$$



- **RC 直列回路と交流電源**：独立変数は t 。キルヒホッフの法則は

$$IR + \frac{1}{C} \int Idt = E_0 \cos(\omega t) \quad (4)$$

これは**積分方程式**なので、微分して

$$iR + \frac{I}{C} = -\omega E_0 \sin(\omega t) \quad (5)$$

- ニュートンの冷却の法則： $\dot{Q} = -\alpha S(T - T_m)$ (6)

- 温度変化率は $\dot{T} = -\frac{\alpha S}{mc}(T - T_m)$ (7)

α : 熱伝達係数 S : 表面積 m : 質量 c : 比熱
 T : 湯の温度 T_m : 周囲の温度

新たな変数 $\theta = T - T_m$ を導入すれば、微分方程式は

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{\tau} \theta \quad \tau = \left(\frac{\alpha S}{mc}\right)^{-1} \quad (8)$$

の斉次形になる。

