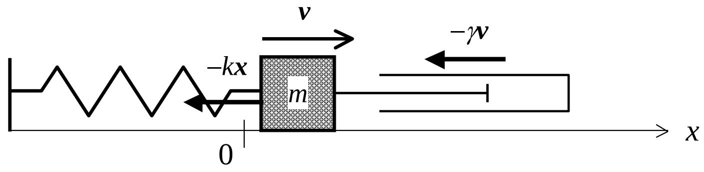
物理学演習 1　今日の One point

第 13 回講義

- ばね，おもり，速度に比例する抵抗(ダンパー)が右図のように組み合わされた系の振動を考える．運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \qquad (1)$$



だが，これを以下のように書き直す．

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0 \qquad (2)$$

- 特性方程式の根は $\lambda_1 = -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0{}^2}$ と $\lambda_2 = -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0{}^2}$．したがって式(2)の微分方程式の一般解は

$$x = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意の定数}) \qquad (3)$$

- 平方根の中身，$\kappa^2 - \omega_0{}^2$ の符号によって運動は様相を変える．

(ア) $\kappa^2 - \omega_0{}^2 > 0$ ：運動は単調な減衰で原点に近づく．これを「過減衰」と呼ぶ．ドアがゆっくり閉じる仕組み(ドアクローザー)がこの領域である．

(イ) $\kappa^2 - \omega_0{}^2 = 0$ ：λ_1 と λ_2 が重根になるため，解は式(6)の形にならない．解は

$$x = (C_1 + C_2 t)\exp(-\kappa t) \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は定数}) \qquad (4)$$

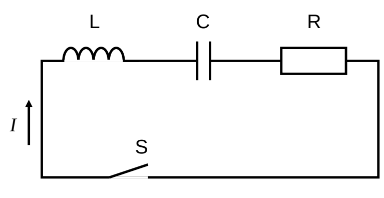
これを「臨界減衰」と呼ぶ．x が速やかにゼロに近づくことから，自動車のサスペンションに応用されている．

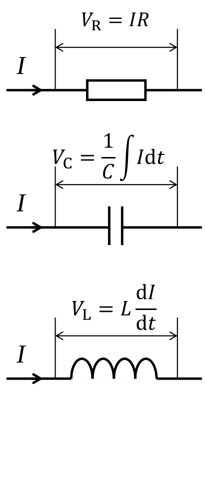
(ウ) $\kappa^2 - \omega_0{}^2 < 0$ ：平方根の中が負になるので，λ_1 と λ_2 は共役複素数である．このときは，オイラーの公式 $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$，$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$ を使えば，

$$x = e^{-\kappa t}\left\{A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right\} \qquad (A,\ B \text{ は定数}) \qquad (5)$$

と書ける．この解は「減衰振動」と呼ばれ，代表的なものは緩やかに振幅を減らしながら振動する振り子の運動などである．

- 抵抗，コンデンサー，コイルの直列回路も同じ微分方程式で記述できる．なぜなら，電流 I を従属変数とするとき，





$$IR + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int I\mathrm{d}t = 0 \text{ 微分して}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}R + L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{I}{C} = 0 \qquad (6)$$

- このとき，$L/R = 2\kappa$，$1/LC = \omega_0^2$ と置き換えれば微分方程式(6)は(2)と同じ形に書ける．

- このように，機械系の振動を電気回路で模擬する計算機を「アナログコンピューター」と呼び，20 世紀中ごろには盛んに使われていた．