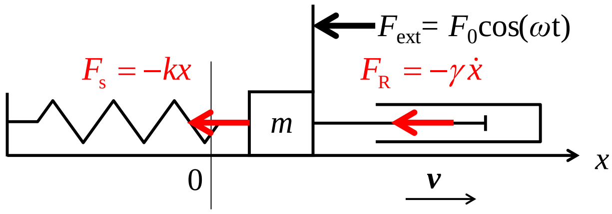
物理学演習 1　今日の One point

第 14 回講義

- ばねとおもりの強制振動：
  運動方程式は



$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\kappa\frac{dx}{dt}+\omega_0^2 x = F_0\cos(\omega t) \qquad (1)$$

対応する斉次形の一般解は$x = C_1 e^{\lambda 1t}+C_2 e^{\lambda 2t}$ (C_1, C_2は定数)だが，ほとんどの場合これは**どうでもよい**.

非斉次形の特殊解は未定係数法を使って

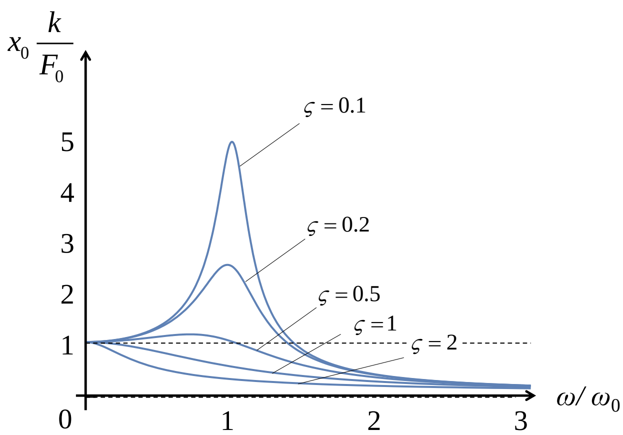
$$x(t)=\frac{F_0/m}{4\kappa^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}\{(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\omega t)+2\kappa\omega\sin(\omega t)\} \qquad (2)$$

これが強制振動の**定常解**．これは，三角関数の公式を使い，

$$x(t)=\frac{F_0/m}{\sqrt{4\kappa^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\cos\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{2\kappa\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) \qquad (3)$$

と書き直せる.

- 強制振動の振幅：$\varsigma=\frac{\kappa}{\omega_0}$を**減衰比**と定義.
  $\varsigma \ll 1$の領域で，$\omega=\omega_0$になると，急に振幅が大きくなる．これを**共振現象**と呼び，日常的にもよく見られる.



- 振動の位相：$\omega \ll \omega_0$のとき強制力が振動と同じ位相で，振動は強制力に従っている．一方，$\omega \gg \omega_0$のときは，振動は強制力とほぼ逆の位相で振動している．共振状態のときの位相差が$\pi/2$で，このとき，外力からおもりに最も効率よくエネルギーが流れる.

- 単振動の微分方程式$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$に非斉次項$F_0\cos(\omega t)$が加わった問題の解き方：
  慌てず，**非斉次線形微分方程式の解法**で解く.

  Step1: 「対応する斉次形微分方程式」を解く．解は言うまでもなく
  $$x = A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$$
  Step2: 特殊解を一つ見つける．$x = C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$を試す.
  ※ここで求めるべき定数を一般解の定数 A, B **と混同しないよう注意**.

  $$\{C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)\}''+\omega_0^2\{C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)\}=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

  解けば，$C_1=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$，$C_2=0$を得る.

  Step3: 対応する斉次系の一般解と特殊解を足す.

  $$x = A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(\omega t) \quad (A,\ B\text{は任意定数}).$$