「物理学演習 4」小テスト(02) 2024/10/03

学籍番号______________ 氏名__________________________________ 得点

解答には最終結果だけでなく，必ず導出過程を記述すること.

Q1: 以下のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の内積$(\vec{a},\vec{b})$を計算しなさい(10×3=30).

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=2+(-2)=0$

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1+i\\-2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1-i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+i\\-2\end{pmatrix}=2+(-4)=-2$

(3) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2i\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}i\\i\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & -2i & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\i\\-1\end{pmatrix}=i+2+(-3)=-1+i$

Q2: 以下の行列 A，B に対して AB を計算せよ (10×2=20).

(1) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}i & 0\\0 & -i\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & i\\0 & i & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & i & 1\\-1 & -i & -1\\1 & i & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1 & -i & -1\\1+i & -1+i & 1+i\\-i & 1 & -i\end{pmatrix}$ 複雑に見えるが，易しい組み合わせなので暗算でもできる.

Q3: 以下の行列 A がユニタリ行列か，エルミート行列かを判断し，該当する下線に○をつけなさい．「ユニタリかつエルミート」という行列もあるので注意のこと(10×3=30).

	ユニタリ	エルミート
(1) $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$	○	
(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	○	○
(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$		○

(1)

$A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ $\quad AA^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^\dagger A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)

$A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad AA^\dagger = A^\dagger A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3)

$A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad AA^\dagger = A^\dagger A = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Q4: 行列$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$の固有値・固有ベクトルをすべて求めなさい．固有ベクトルは規格化されていなくてもよい(20).

固有方程式　$\det(\lambda I - \mathrm{A}) = 0$ $\quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - 2 = 0$

固有値：$+\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

固有値$+\sqrt{2}$に対応する固有ベクトル：

$\begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$を満足する$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$は$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$　　※ベクトルは一例

固有値$-\sqrt{2}$に対応する固有ベクトル：

$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 1 & -1 \\ -1 & -\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$を満足する$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$は$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$