「物理学演習 4」小テスト(04) 2024/10/17

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　得点＿＿＿＿＿＿.

解答には最終結果だけでなく，必ず導出過程を記述すること.

Q1: 関数 $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < \pi) \\ 0 & (\pi \le x < 2\pi) \end{cases}$ を考える.

(1) $a_n = \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$ を求めなさい．ただし、nはゼロ以上の整数である(20).

$f(x)$は$(\pi \le x < 2\pi)$でゼロなので，積分範囲は$(0 \le x < \pi)$でよい.

$\int_0^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = 0$．ただし$n = 0$のときは$\cos(0) = 1$なので，$a_0 = \pi$.

答：$a_0 = \pi,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0, \ldots$

(2) $b_n = \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$ を求めなさい．ただし、nは正の整数である(20).

$f(x)$は$(\pi \le x < 2\pi)$でゼロなので，積分範囲は$(0 \le x < \pi)$でよい.

$\int_0^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$．ここで$n$が奇数のとき$\cos(n\pi)$は$-1$，$n$が偶数のとき

$\cos(n\pi)$は1．したがって，答：$b_1 = 2,\quad b_2 = 0,\quad b_3 = \frac{2}{3},\quad b_4 = 0,\quad b_5 = \frac{2}{5}, \ldots$

(3) 関数$f(x)$を$f(x + 2\pi) = f(x)$によって周期的に拡張した周期2πの周期関数のフーリエ級数展開を求めなさい．総和記号を使うこと(10).

※ヒント：$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1}$

(1)，(2)の解から，$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\sin\{(2k-1)x\}$

※別の表記法として$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n}\sin(nx)$と書くこともできる．これらが等価な表記であることを確認せよ.

Q2: 関数$f(x) = \begin{cases} 1 & \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\right) \end{cases}$のフーリエ余弦(級数)展開を求めなさい(20).

※ヒント：$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$

フーリエ余弦展開は，積分範囲 0 からπでa_nの計算を行う．$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$，関数は 0 から$\frac{\pi}{2}$の範囲でのみ値を持つ．$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi/2}$．ここで$n$が奇数のとき$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$は$(-1)^{(n-1)/2}$，$n$が偶数のとき$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$は0．つまり，$a_n$が偶数の時は係数がゼロになる．

答：$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos\{(2k-1)x\}$

Q3: 関数$f(x) = |x|\ (-2 \leq x < 2)$を周期4の周期関数に拡張した関数$f(x)$について以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$は奇関数か偶関数か．「奇関数」「偶関数」「どちらでもない」で解答せよ(10).

偶関数

(2) $f(x)$をフーリエ級数展開せよ(20). ※ヒント：部分積分の公式から

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\left[x\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L - \frac{2}{L}\frac{L}{n\pi}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

偶関数なのでb_nは消滅．$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$．ヒントに従い計算すると，第 1 項は恒等的にゼロ．$a_n = -\frac{2}{n\pi}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{2L}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L$．積分は，$n$が奇数のとき$-2$，偶数のときゼロ．$a_0 = L$は別途計算．

$f(x) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left\{\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right\}$．最後に$L = 2$を代入，

答：$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left\{\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right\}$