学籍番号______________ 氏名__________________________________ 得点____________.

解答には最終結果だけでなく, 必ず導出過程を記述すること.

Q1: 以下の状態ベクトル$|\psi\rangle$，エルミート行列$\hat{A}$に対して測定値+1 を得る確率を求めよ(15×2=30).

(1) $|\psi\rangle = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

$\hat{A}$はパウリ X．固有値は$+1$，-1で，$+1$に対応する固有ベクトルは$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

計算は$|\langle+|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{49}{50}$

(2) $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$

固有値と固有ベクトルを計算．固有値は 1 と 3 で，固有値 1 の固有ベクトルは $|A_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$．あとは公式通りで，$|\langle A_1|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

Q2: 量子ビットの初期状態を$|\psi\rangle = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}24\\7\end{pmatrix}$とする．この状態に対して，パウリ Y を測定したら，測定値は+1 であった．測定後の状態ベクトルを求めよ(20).

計算問題ではなく，知識を問う問題．量子ビットの初期状態にかかわらず，測定後の状態ベクトルは$|+i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$である．ただし，初期状態が$|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$のときには，測定値が$+1$になることはない．

Q3: 以下の状態ベクトル$|\psi\rangle$，エルミート行列$\hat{A}$に対して，測定値の期待値を求めよ(15×2=30).

(1) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

期待値の公式：$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0.$

(2) $|\psi\rangle = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

$\langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{1}{13}(12 \quad 5)\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix} = \frac{95}{169}.$

Q4: シュレーディンガー方程式の初期状態$|\psi(0)\rangle$と，ハミルトニアン$\hat{H}$が以下のように与えられている．$t > 0$の状態$|\psi(t)\rangle$を求めよ．ただし$\omega > 0$は定数である(20).

$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\hat{H} = \hbar\omega Y$．ただし$Y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}$ (パウリ Y)

$\hat{H}$が時間に依存しないとき，$|\psi(t)\rangle = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)|\psi(0)\rangle$は暗記事項．$\hat{H}$がパウリ Y の定数倍だから固有値は±1，固有ベクトルは$|\pm i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\pm i\end{pmatrix}$．計算パートに入ろう．題意から，

$\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar) = \sum_j e^{-i\omega t E_j}|E_j\rangle\langle E_j|$．ここに，$E_1 = +1$，$E_2 = -1$，

$|E_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$，$|E_2\rangle = \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$を代入して丁寧に計算.

$$\hat{U}(t) = \exp[-i\omega t(+1)]\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\i & 1\end{pmatrix} + \exp[-i\omega t(-1)]\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\-i & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} & -\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\\ \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} & \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\omega t - \sin\omega t\\ \cos\omega t + \sin\omega t\end{pmatrix}$$