「物理学演習 4」小テスト(09)　　2024/11/28

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　得点＿＿＿＿＿＿.

解答には最終結果だけでなく，必ず導出過程を記述すること.

・$f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$のフーリエ変換：$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x$ (ω:実定数)

・$f(x)$ $(0 \leq x < \infty)$のフーリエ余弦変換：$\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,\mathrm{d}x$ (ω:実定数)

Q1: 次の関数$f(x)$について，問いに答えよ.　$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$

(1) $f(x)$のフーリエ変換を求めなさい(20).

$$F(\omega) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-2i\omega}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i\omega} = \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

(2) (1)の結果を利用して，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega$を求めなさい(10). ヒント：$F(\omega)$のフーリエ逆変換の表現に$x$=0 を代入せよ.

xにゼロを代入すれば，$f(0) = \frac{1}{2}$.　$\displaystyle\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega$を変形すれば,

答：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega = \pi$

Q2: 関数$f(x) = e^{-3ax}$ $(a > 0, x \geq 0)$のフーリエ余弦変換を求めなさい(20).

$$F(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-3ax}\cos(\omega x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} e^{-3ax}\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-(3a-i\omega)x} + e^{-(3a+i\omega)x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3a - i\omega}e^{-(3a-i\omega)x} - \frac{1}{3a + i\omega}e^{-(3a+i\omega)x}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3a - i\omega} + \frac{1}{3a + i\omega}\right)$$

更に，分母を有理化すれば，$\displaystyle F(\omega) = \frac{3a}{9a^2 + \omega^2}$

Q3: 関数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$を考える．zを複素数としたとき，複素関数$\tilde{f}(z)=\dfrac{e^{-i\omega z}}{z^2+4}$は$z=\pm 2i$に特異点を持つ．

(1) 特異点$z=+2i$における$\tilde{f}(z)$の留数を求めなさい(20).

$$\mathrm{Res}\left[f(z)e^{-i\omega z};2i\right]=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+4}=\lim_{z\to 2i}\frac{e^{-i\omega z}}{z+2i}=\frac{e^{2\omega}}{4i}$$

(2) (1)の結果を使い，$f(x)$に対して$\omega<0$のときのフーリエ変換$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{x^2+4}\mathrm{d}x$を求めよ(20).

留数の定理から$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{x^2+4}\mathrm{d}x=2\pi i\mathrm{Res}\left[f(z)e^{-i\omega z};2i\right]=\frac{\pi}{2}e^{2\omega}$

Q4: 関数$f(x)=e^{i\omega_0 x}$(ω_0は定数)のフーリエ変換を，ディラックのデルタ関数を用いて表しなさい．ここで，$\delta(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\mathrm{d}x$ である(10).

$f(x)$のフーリエ変換を計算する．

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_0 x}e^{-i\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_0-\omega)x}\mathrm{d}x$$

積分はディラックのデルタ関数のωを$(\omega_0-\omega)$に置き換えたものだから，

答：$F(\omega)=2\pi\delta(\omega_0-\omega)$

この解答の持つ意味について考える．$f(x)=e^{i\omega_0 x}=\cos(\omega_0 x)+i\sin(\omega_0 x)$と書けるから，これは周波数$\omega=\omega_0$の正弦・余弦関数である．したがってその周波数成分は$\omega=\omega_0$ にのみ値を持ち，その数学的表現がデルタ関数なのである．