

学籍番号 _____ 氏名 _____ 得点 _____.

解答には最終結果だけでなく、必ず導出過程を記述すること.

Q1: 以下の状態ベクトル $|\psi\rangle$, エルミート行列 \hat{A} に対して測定値+1 を得る確率を求めよ (15×2=30).

(1) $|\psi\rangle = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Q2: 量子ビットの初期状態を $|\psi\rangle = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$ とする. この状態に対して, パウリ Y を測定し

たら, 測定値は+1 であった. 測定後の状態ベクトルを求めよ(20).

Q3: 以下の状態ベクトル $|\psi\rangle$, エルミート行列 \hat{A} に対して, 測定値の期待値を求めよ (15×2=30).

$$(1) |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) |\psi\rangle = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Q4: シュレーディンガー方程式の初期状態 $|\psi(0)\rangle$ と, ハミルトニアン \hat{H} が以下のように与えられている. $t > 0$ の状態 $|\psi(t)\rangle$ を求めよ. ただし $\omega > 0$ は定数である(20).

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \hbar\omega Y. \quad \text{ただし } Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{パウリ } Y)$$

学籍番号 _____ 氏名 _____ 得点 _____.

解答には最終結果だけでなく、必ず導出過程を記述すること。

Q1: 以下の状態ベクトル $|\psi\rangle$, エルミート行列 \hat{A} に対して測定値+1 を得る確率を求めよ (15×2=30).

$$(3) |\psi\rangle = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

\hat{A} はパウリ X. 固有値は+1, -1で, +1に対応する固有ベクトルは $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{計算は } |\langle +|\psi\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{49}{50}$$

$$(4) |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

固有値と固有ベクトルを計算. 固有値は 1 と 3 で, 固有値 1 の固有ベクトルは

$$|A_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{あとは公式通りで, } |\langle A_1|\psi\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2}.$$

Q2: 量子ビットの初期状態を $|\psi\rangle = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$ とする. この状態に対して, パウリ X を測定し

たら, 測定値は+1であった. 測定後の状態ベクトルを求めよ(20).

計算問題ではなく, 知識を問う問題. 量子ビットの初期状態にかかわらず, 測定後の状態

ベクトルは $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

※ただし, 初期状態が $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ のときは, 測定値が+1になる確率はゼロである.

Q3: 以下の状態ベクトル $|\psi\rangle$, エルミート行列 \hat{A} に対して, 測定値の期待値を求めよ (15×2=30).

$$(3) |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{期待値の公式: } \langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$(4) |\psi\rangle = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \frac{1}{13} (12 \ 5) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{95}{169}.$$

Q4: 以下のように時刻 $t=0$ の初期状態 $|\psi(0)\rangle$ と, ハミルトニアン \hat{H} が与えられているとする. 時刻 t の状態 $|\psi(t)\rangle$ を求めよ. ただし $\omega > 0$ は定数である(20). ※ヒント: \hat{H} はパウリ Y.

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

\hat{H} がパウリ Y だから, 固有値は ± 1 , 固有ベクトルは $|\pm i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$. $|\psi(t)\rangle =$

$\hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$ で, $\hat{U}(t, t_0) = \exp[-i\hat{H}(t - t_0)/\hbar]$ までは知識の問題. 計算パートに入ろう.

題意から, $\hat{U}(t) = \exp[-i\omega\hat{H}t] = \sum_i e^{-i\omega t E_i} |E_i\rangle \langle E_i|$. ここに, $E_1 = +1$, $E_2 = -1$,

$|E_1\rangle = |+i\rangle$, $|E_2\rangle = |-i\rangle$ を代入して丁寧に計算.

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \exp[-i\omega t(+1)] \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + \exp[-i\omega t(-1)] \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} & -\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \\ \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} & \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\omega t - \sin\omega t \\ \cos\omega t + \sin\omega t \end{pmatrix}$$

