「物理学演習 4」小テスト(09)　2024/11/28

学籍番号＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　得点＿＿＿＿＿＿.

解答には最終結果だけでなく，必ず導出過程を記述すること.

・$f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$のフーリエ変換：$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x$ (ω:実定数)

・$f(x)$ $(0 \le x < \infty)$のフーリエ余弦変換：$\int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, \mathrm{d}x$ (ω:実定数)

Q1: 次の関数$f(x)$について，問いに答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (|x| \le 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(1) $f(x)$のフーリエ変換を求めなさい(20).

(2) (1)の結果を利用して，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} \mathrm{d}\omega$を求めなさい(10). ヒント：$F(\omega)$のフーリエ逆変換の表現に$x$=0 を代入せよ.

Q2: 関数$f(x) = e^{-3ax}$ $(a > 0, x \ge 0)$のフーリエ余弦変換を求めなさい(20).

Q3: 関数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$を考える．zを複素数としたとき，複素関数$\tilde{f}(z)=\dfrac{e^{-i\omega z}}{z^2+4}$は$z=\pm 2i$に特異点を持つ．

(1) 特異点$z=+2i$における$\tilde{f}(z)$の留数を求めなさい(20).

(2) (1)の結果を使い，$f(x)$に対して$\omega<0$のときのフーリエ変換$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{x^2+4}\mathrm{d}x$を求めよ(20).

Q4: 関数$f(x)=e^{i\omega_0 x}$(ω_0は定数)のフーリエ変換を，ディラックのデルタ関数を用いて表しなさい．ここで，$\delta(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\mathrm{d}x$ である(10).