

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_ 得点 \_\_\_\_\_

※指定が無い限り, 重力加速度の大きさを  $g$  とせよ.

※計算問題の場合, 途中式がない解答は無効とする.

Q1: 速度に比例する抵抗を受けながら落下する質量  $m$  の物体の運動を解析する. 運動は 1 次元で, 鉛直上向きに  $y$  軸を取り, 抵抗力は  $-\gamma \dot{y}$  で表されるとする.

(1) 運動方程式を立てなさい(10).

$$m\ddot{y} = -mg - \gamma\dot{y}$$

(2)  $t = 0$  で物体を静かに離した. 速度  $\dot{y}(t)$  を定めよ(10).

一般解は  $\dot{y} = Ce^{-(\gamma/m)t} - \frac{mg}{\gamma}$ . 初期条件を代入,  $\dot{y} = \frac{mg}{\gamma}(e^{-(\gamma/m)t} - 1)$ .

(3)  $m/\gamma = \tau$  は時間の次元を持ち, これを「時定数」と呼ぶ. いま,  $\tau = 1.0 \text{ s}$ , 重力加速度を  $10.0 \text{ m/s}^2$  と仮定する. 充分時間が経ったときの, 物体の速度(マイナス)を求めよ(10).

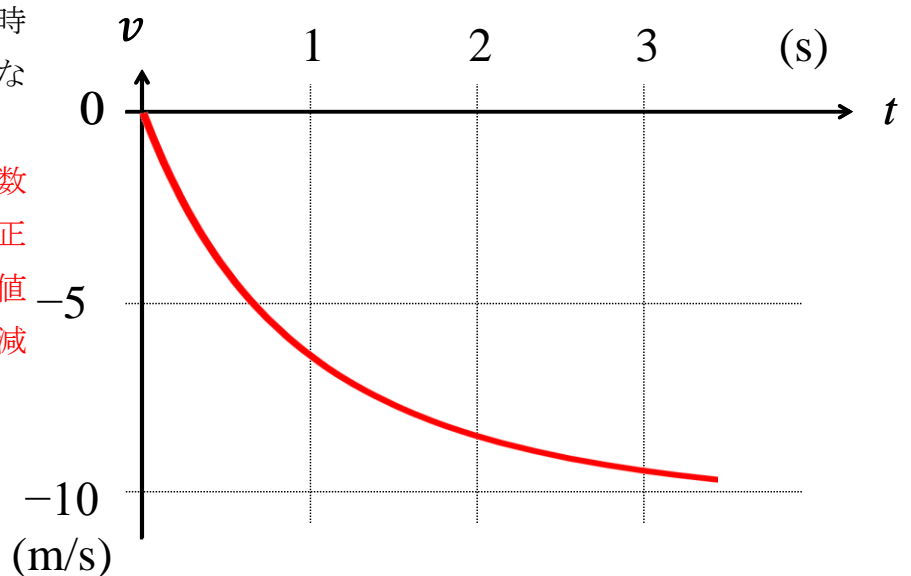
(2)の解から終端速度  $-\frac{mg}{\gamma}$ .  $m/\gamma = 1.0$ ,  $g = 10$  だから  $-10 \text{ m/s}$ .

(4) 同様に,  $t = 3.0 \text{ s}$  の速度を求めよ(10).

$\dot{y} = \frac{mg}{\gamma}(e^{-(\gamma/m)t} - 1)$  に 3 を代入し,  $-9.5 \text{ m/s}$ .

(5) (3)の条件で物体の速度と時間の関係をグラフに表しなさい(10).

$-10 \text{ m/s}$  に漸近する指数関数的減衰が描かれていれば正解. 終端速度の具体的な数値が書いていないものは減点.



(6)  $\tau = 1.0 \text{ s}$ , 重力加速度を  $10.0 \text{ m/s}^2$  とする. 物体は時刻ゼロで  $y = 0$  にいた.  $1.0$  秒後の物体の位置を有効数字 2 桁で求めよ(10).

$$\dot{y} = 10(e^{-t} - 1) \text{ を時間で一回積分して, } y = 10(-e^{-t} - t) + C$$

$t = 0$  で  $y = 0$  だから  $C = 10$  で,  $t$  に  $1$  を代入,  $y = 10(-e^{-1} - 1) + 10$ . 計算して  $-3.7 \text{ m}$ .

Q2: パラシュートの落下は慣性領域の近似が成り立ち, 運動方程式は上向きを正として

$$m\dot{v} = -mg + \beta S \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \beta : \text{空気抵抗係数} \quad S : \text{パラシュートの断面積} \quad \rho : \text{空気の密度}$$

$m$  : 質量 である.

(1) 終端速度を求めよ(10).

$$mg = \beta S \frac{1}{2} \rho v^2 \text{ を変形し, } v_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho\beta S}}. \text{ 符号は問わない.}$$

(2) パラシュートが終端速度に達したときの空気抵抗力の大きさを求めよ(10).

常識問題. 空気抵抗力が重力とつり合うから速度が一定になる. 答え :  $mg$ .

(3) 多くの物体で  $\beta=1$  が良い近似である. 降下隊員の装備重量が  $100\text{kg}$ , 空気の密度が  $1.3\text{kg/m}^3$ , パラシュートの半径が  $5.5\text{m}$  のとき, 終端速度を求めよ. 重力加速度の大きさを  $9.8\text{m/s}^2$  とする(20).

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho\beta S}} \text{ を具体的数値で計算. } 4.0\text{m/s}. \text{ 以外に速い. 鍛えた人でないと怪我は避けられな}$$

い. ちなみに直径  $11\text{m}$  は自衛隊のパラシュート降下部隊と同じだが, 本物の終端速度は  $5\text{m/s}$  に達する.