

学籍番号 _____ 氏名 _____ 得点 _____

※指定が無い限り、重力加速度の大きさを g とせよ。

※計算問題の場合、途中式がない解答は無効とする。

Q1: 速度に比例する抵抗を受けながら落下する質量 m の物体の運動を解析する。運動は 1 次元で、鉛直上向きに y 軸を取り、抵抗力は $-\gamma \dot{y}$ で表されるとする。

(1) 運動方程式を立てなさい(10).

$$m\ddot{y} = -mg - \gamma\dot{y}$$

(2) $t = 0$ で物体を静かに離した。速度 $\dot{y}(t)$ を定めよ(10).

一般解は $\dot{y} = Ce^{-(\gamma/m)t} - \frac{mg}{\gamma}$. 初期条件を代入, $\dot{y} = \frac{mg}{\gamma}(e^{-(\gamma/m)t} - 1)$.

(3) $m/\gamma = \tau$ は時間の次元を持ち、これを「時定数」と呼ぶ。いま、 $\tau = 1.0 \text{ s}$ 、重力加速度を 10.0 m/s^2 と仮定する。充分時間が経ったときの、物体の速度(マイナス)を求めよ(10).

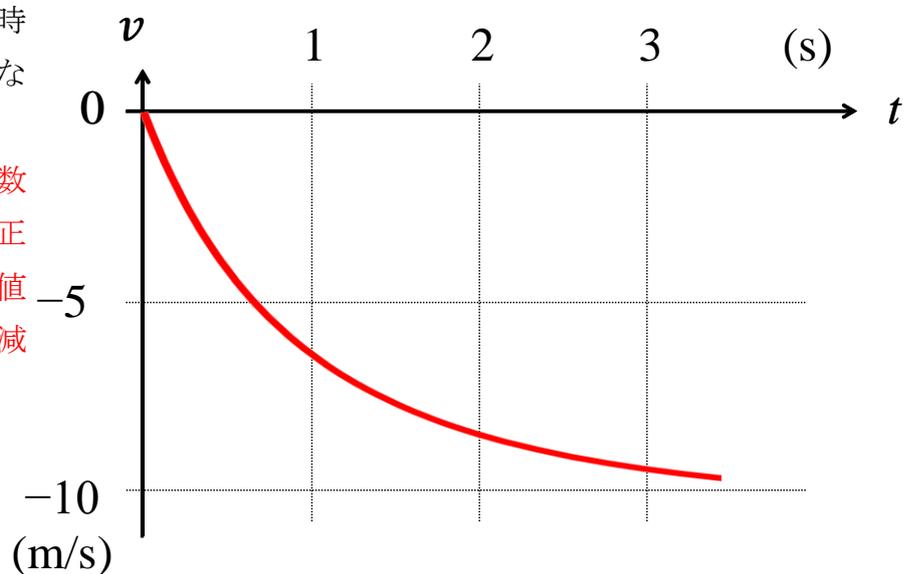
(2)の解から終端速度 $-\frac{mg}{\gamma}$. $m/\gamma = 1.0$, $g = 10$ だから -10 m/s .

(4) 同様に、 $t = 3.0 \text{ s}$ の速度を求めよ(10).

$\dot{y} = \frac{mg}{\gamma}(e^{-(\gamma/m)t} - 1)$ に 3 を代入し, -9.5 m/s .

(5) (3)の条件で物体の速度と時間の関係をグラフに表しなさい(10).

-10 m/s に漸近する指数関数的減衰が描かれていれば正解。終端速度の具体的な数値が書いていないものは減点。



(6) $\tau = 1.0 \text{ s}$, 重力加速度を 10.0 m/s^2 とする. 物体は時刻ゼロで $y = 0$ にいた. 1.0 秒後の物体の位置を有効数字 2 桁で求めよ(10).

$$\dot{y} = 10(e^{-t} - 1) \text{ を時間で一回積分して, } y = 10(-e^{-t} - t) + C$$

$t = 0$ で $y = 0$ だから $C = 10$ で, t に 1 を代入, $y = 10(-e^{-1} - 1) + 10$. 計算して -3.7 m .

Q2: パラシュートの落下は慣性領域の近似が成り立ち, 運動方程式は上向きを正として

$$m\dot{v} = -mg + \beta S \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \beta : \text{空気抵抗係数} \quad S : \text{パラシュートの断面積} \quad \rho : \text{空気の密度}$$

m : 質量 である.

(1) 終端速度を求めよ(10).

$$mg = \beta S \frac{1}{2} \rho v^2 \text{ を変形し, } v_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho\beta S}}. \text{ 符号は問わない.}$$

(2) パラシュートが終端速度に達したときの空気抵抗力の大きさを求めよ(10).

常識問題. 空気抵抗力が重力とつり合うから速度が一定になる. 答え: mg .

(3) 多くの物体で $\beta=1$ が良い近似である. 降下隊員の装備重量が 100kg , 空気の密度が 1.3kg/m^3 , パラシュートの半径が 5.5m のとき, 終端速度を求めよ. 重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とする(20).

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho\beta S}} \text{ を具体的数値で計算. } 4.0\text{m/s}. \text{ 以外に速い. 鍛えた人でないと怪我は避けられな}$$

い. ちなみに直径 11m は自衛隊のパラシュート降下部隊と同じだが, 本物の終端速度は 5m/s に達する.