「力学 1」問題(10) 2024/11/27

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　得点＿＿＿＿＿＿

**※計算問題の場合，途中式がない解答は無効とする.**

Q1: $x(t) = \cos(\omega t)$が微分方程式$\ddot{x} = -\omega^2 x$ の解であることを示しなさい(10).

$\cos(\omega t)$を時間で 2 回微分すると$-\omega^2\cos(\omega t)$となるので，$\ddot{x} = -\omega^2 x$が成立．ゆえに$\cos(\omega t)$は微分方程式の解である．

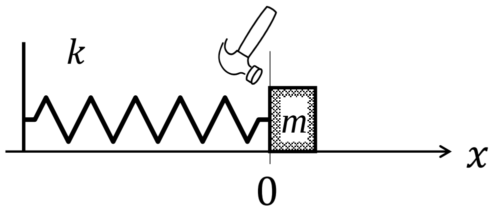
Q2: 微分方程式の一般解，$x(t) = C\cos(\omega t + \delta)$ ($C$，$\delta$は任意の定数)が与えられた．時刻ゼロで$x = 0$，$\dot{x} = V$ である．$C$，$\delta$を決定せよ(20).

時刻ゼロで$0 = C\cos(\delta)$．ここで$C = 0$と考えると解は恒等的にゼロとなってしまうのでこれは却下．一方，$\delta = \pi/2$とするとやはり右辺はゼロなのでこれを採用．時間で微分すると

$\dot{x} = -\omega C\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$．時刻ゼロで$V = -\omega C\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$より$C = -V/\omega$.

※$\delta = -\pi/2$でも正解だが，この場合は$C = V/\omega$となる．

Q2: 図のように質量$m$のおもりがばね定数$k$のばねにつけられ，水平で摩擦の無い床に置かれた．座標系を図のように取った．時刻ゼロでおもりに正方向，大きさ$K$の力積を与えた．以下の問いに答えよ．




(1) 運動方程式を書きなさい(10).

$$m\ddot{x} = -kx$$

(2) 運動の初期条件$(x, \dot{x})$を数式で表せ(10).

$t = 0$で$x = 0$，$\dot{x} = K/m$.

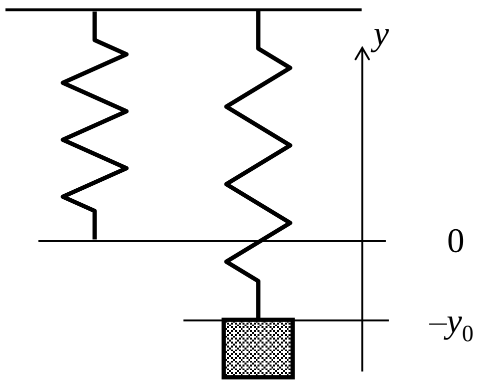
※求められているのは**初期条件**．意味が解っていない解答は不正解.

(3) 運動を決定せよ．ここで$\omega = \sqrt{k/m}$ を使い解答すること(10).

$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$．$\frac{k}{m} = \omega^2$と置けば，これは単振動の微分方程式である．一般解は

$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$　($A$，$B$は定数)．初期条件を代入すれば$A = 0$，$B = \frac{K}{\omega m}$．したがって，答：$x = \frac{K}{\omega m}\sin(\omega t)$

Q3: 図のように鉛直に保持されたばね定数$k$のばねに質量$m$ のおもりをつけるとばねは平衡の長さから$y_0$伸びて止まった．ここからおもりを更に$\Delta y$押し下げ，時刻ゼロで静かに離す．座標系を図のように取った．重力加速度の大きさを$g$とする．以下の問いに答えよ．




(1) 運動方程式を書きなさい(10).

$$m\ddot{y} = -ky - mg$$

(2) おもりが止まった位置は$y = -y_0$である．従属変数$y' = y - y_0$を使い，運動方程式の非斉次項を消去せよ(10).

$y' = y - y_0$を変形，$y = y' + y_0$．また$\ddot{y} = \ddot{y}'$．これらを元の運動方程式に代入すると，

$$m\ddot{y}' = -k(y' + y_0) - mg$$

ここで，$y_0 = -\dfrac{mg}{k}$を使えば，

$$m\ddot{y}' = -ky'$$

となって非斉次項が消える．

(3) 時刻ゼロにおける$y'$と$\dot{y}'$を数式で表せ(10).

$t = 0$で$y' = -\Delta y$，$\dot{y}' = 0$．

(4) 運動$y(t)$を決定せよ．ここで$\omega = \sqrt{k/m}$ を使い解答すること(10).

$\dfrac{k}{m} = \omega^2$と置けば，これは単振動の微分方程式である．一般解は

$y' = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$　($A$，$B$は定数)．初期条件を代入すれば$A = -\Delta y$，$B = 0$．したがって，$y' = -\Delta y\cos(\omega t)$．ここに$y = y' - y_0$を使えば，

答：$y' = -\Delta y\cos(\omega t) - y_0$