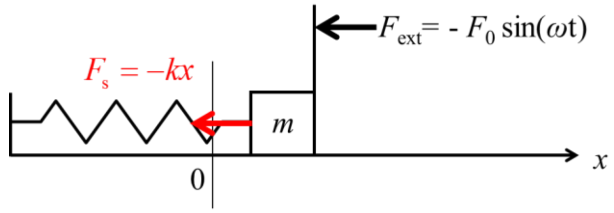
「物理数学 1」小テスト(12) 2024/07/08

学籍番号______________ 氏名____

図のような, 周期的な外力が働くおもりの運動を解析する.



注意：ここで減衰力はゼロとする！

運動方程式は $m\ddot{x} = -kx - F_0 \sin(\omega t)$ . . . (ア)

である。以下の問いで $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ を使いなさい。

Q1: 対応する斉次形の一般解 $x_g(t)$ を三角関数 $(\sin(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t))$ で表しなさい (5).

$x_g(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$

Q2: 特殊解を $x_s(t) = A\sin(\omega t)$ と置き, 式 (ア) から A を決定しなさい.

$x_s(t)$ を (ア) に代入すと $-A\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega_0^2 A\sin(\omega t) - \dfrac{F_0}{m}\sin(\omega t)$. よって

$$A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

Q3: Q1, Q2 の結果を使って微分方程式 (ア) の一般解 $x(t)$ を求めなさい.

$$x(t) = x_g(t) + x_s(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\sin(\omega t)$$

Q4: 初期条件 $x(0) = L$, $\dot{x}(0) = 0$ を満たす運動方程式 (ア) の特殊解を求めなさい.

Q3 の結果を使って $x(0) = 0 \rightarrow C_2 = L$

Q3 の結果を微分して $\dot{x}(t) = C_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t) - C_2 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + \dfrac{F_0 \omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\cos(\omega t)$

$$\dot{x}(0) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{-F_0 \omega}{m\omega_0(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

よって初期条件を満たす特殊解は

$$x(t) = L\cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right]$$

追加コメント：ここで計算しないが、$\omega \rightarrow \omega_0$ （共鳴）の極限では

$x(t) \rightarrow L\cos(\omega t) + \dfrac{F_0 t}{2m\omega}\left(\cos(\omega t) - \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega t}\right)$ となり、時間 t に比例して増加する部分もある.