物理数学１　今日の One point

第４回講義

- **変数分離形**：一般的表現は $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=X(x)Y(y)$ で，文章で書けば以下の特徴を持つ微分方程式.
  (ア) １階微分方程式
  (イ) y'を $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ と書き直して分数の様に扱うとき，y を含む項をすべて左辺に，x を含む項をすべて右辺に移項できる.

- **変数分離法による微分方程式の解法**：例として $y'=xy$ を取り上げる.

  (ア) 変数分離する．$\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=x\mathrm{d}x$

  (イ) 左辺を y で，右辺を x で積分する．$\int\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\int x\mathrm{d}x \quad\rightarrow\quad \ln|y|+C_1=\dfrac{x^2}{2}+C_2$.

  ※ここで，**任意定数は１つにまとめること.**

  (ウ) これで，微分方程式は「解けた」ことになるが，可能な限り陽関数 $y = f(x)$に変形する．この場合，両辺の指数をとる. $|y|=\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\exp(C')$.

  (エ) 左辺の絶対値を外して，代わりに右辺の任意定数を $\pm\exp(C')$とする. これも任意定数だから C と置き直し，$y=C\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ が最終結果.

  ※この変形は憶える：$\ln|y|=x+C' \quad\rightarrow\quad y=Ce^x$

- **階数の引き下げ**：$y^{(n)}+p(x)y^{(n-1)}=f(x)$ の微分方程式．すなわち n 階微分と$(n-1)$階微分のみからなる**線形**微分方程式．この場合，$y^{(n-1)}$を変数 u とすれば変数分離形．解いた後，$(n-1)$回積分すれば y を得る.

- **同次形**: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の形に書ける微分方程式. 言い換えれば，$\dfrac{y}{x}=u$ と置き換えると，変数がすべて u になるような一階微分方程式．一見そう見えない場合もあるので注意.

  例：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{x+y}$ は $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1-y/x}{1+y/x}=\dfrac{1-u}{1+u}$ と変形すれば同次形とわかる．解き方は，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ux)=\dfrac{1-u}{1+u} \quad\rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x+u=\dfrac{1-u}{1+u}$．あとは $u(x)$の微分方程式を変数分離で解き，最後に $y=ux$ で y を得る.