物理数学１　今日の One point

第 5 回講義

- **定数係数斉次線形微分方程式**：
一般的表現は$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$.
(ア) xの関数がない(定数係数)，定数項もない(斉次).
　　$y' = 0$は斉次だが，$y' = 1$は非斉次なので注意すること.

(イ) yとyの微分同士の積がない(線形).

- **定数係数斉次線形微分方程式の基本解**：
$y = e^{\lambda_i x}$，は，微分方程式$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$の解である．ただし，$\lambda_i$は特性方程式$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$の根の 1 つである.

- **ロンスキー行列と解の独立性**：

微分方程式の解をy_1，y_2， ...y_nとするとき，以下の行列を考える.

$$\text{ロンスキー行列}：\mathbf{W} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1{}' & & y_n{}' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ロンスキー行列$\mathbf{W}$の行列式が恒等的にゼロでなければ解は互いに線形独立.

- **定数係数斉次線形微分方程式の解法**：
Step1: 特性方程式を作る．特性方程式は，$y^{(n)}$をλ^nに置き換えたλのn次方程式.
Step2: 解く．重根がなければ，n階微分方程式の特性方程式の根はn個.
Step3: 根をλ_1，λ_2， ...λ_nとするとき，$y_1 = e^{\lambda_1 x}$，$y_2 = e^{\lambda_2 x}$，…$y_n = e^{\lambda_n x}$は微分方程式の解でこれらを基本解と呼ぶ.
Step4: 一般解は基本解の線形結合で表され，

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x} \quad (C_1，C_2，\ldots C_n\text{は定数})$$

以上.

Step3’: 特性方程式に重根があるとき, 基本解は$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$とするとよい．あとは同じ.

- **定数係数斉次線形微分方程式の解法の例**：
問題：$y'' - y' - 2y = 0$を解きなさい.

Step1: $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$

Step2: 因数分解して，$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$．根は$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = 2$.

Step3: 基本解はe^{-x}とe^{2x}.

Step4: 一般解は$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$　　(C_1，C_2は定数)

以上.