物理数学１　今日の One point

第 6 回講義

- **定数係数非斉次線形微分方程式**：

  一般的表現は $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$.

  (ア) y には x の関数が掛からない(定数係数)，右辺は x の関数または定数(非斉次).
  「右辺が定数」は，立派に非斉次なので注意すること.

  (イ) y と y の微分同士の積がない(線形).

- **定数係数非斉次線形微分方程式の「対応する斉次形微分方程式」**：
  まず，対応する斉次形という考え方を理解する．それは,

  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ の**右辺をゼロ**とした斉次線形微分方程式. これは解ける．解き方は第 5 回の One Point 参照のこと.

- **定数係数非斉次線形微分方程式の特殊解**：

  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ の解を 1 つ挙げよ，と言われたとき，それは結構あっさり見つかる. 例えば，$a_1 y' + a_0 y = k$ (k は定数)という微分方程式があるとき,

  $y = \dfrac{k}{a_0}$ は微分方程式の解である.

- **定数係数非斉次線形微分方程式の解法**：
  Step1: 「対応する斉次形微分方程式」を解く．解き方は省略.

  Step2: 特性方程式に重根がなければ，n 個の基本解 $y_1 = e^{\lambda 1x}$，$y_2 = e^{2x}$，$\ldots y_n = e^{\lambda nx}$ を得る.
  特性方程式に重根があるとき，基本解は $y_1 = e^{\lambda 1x}$，$y_2 = x\, e^{\lambda 1x}$ とするとよい.

  Step3: 微分方程式の特殊解を一つ見つける. 右辺が定数なら, 特殊解は定数だろう, とアタリをつけ，試行錯誤.

  Step4: 対応する斉次形の一般解($C_1 e^{\lambda 1x} + C_2 e^{\lambda 2x} + \ldots$)と，一つの特殊解を足したものが微分方程式の一般解.

以上.

- **具体例**：$u(t)$の非斉次線形微分方程式を解く.

  問題 : $m\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -ku - mg$ ⇒ 対応する斉次形 : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{m}u = 0$

  特殊解 : $u = -\dfrac{mg}{k}$　　一般解 : $u = Ce^{-(k/m)x}$

  一般解 : $u = Ce^{-(k/m)x} - \dfrac{mg}{k}$　（Cは定数）