物理数学１　今日の One point

第 7 回講義

- **未定係数法による特殊解の探し方**：
  (ア) $f(x)$がべき関数(または定数)のとき，$y_s = Ax^2+Bx+C$ といったべき関数を試す．最大の次数はべきの次数．
  (イ) $f(x)$が三角関数のとき，$y_s = A\cos(kx)+B\sin(kx)$ を試す．ここで k は $f(x)$に含まれる三角関数と同じものでなくてはならない．たとえ $f(x)$が sin だけでも，特殊解は sin と cos の組み合わせである可能性が高い．
  (ウ) $f(x)$が指数関数のとき，$y_s = Ae^{kx}$ を試す．ここで k は $f(x)$に含まれる指数関数と同じものでなくてはならない．
  (エ) ただし，k が微分方程式の一般解にも含まれるときは，$y_s = Axe^{kx}$ を試すこと．考え方は特性方程式の重根と同じ．

- **定数変化法による特殊解の探し方**:
  一般の方法は難しいので，微分方程式を

$$y''+a_1y'+a_0y = f(x) \tag{1}$$

に限定．対応する斉次形の一般解は y_1，y_2 とする．ここで $y_1=e^{\lambda 1x}$，$y_2=e^{\lambda 2x}$ で，λ_1，λ_2 は特性方程式の根である．すると，特殊解は

$$y_s = A_1y_1 + A_2y_2 \tag{2}$$

と書くことができて，A_1，A_2 はそれぞれ

$$A_1 = -\int\frac{y_2 f(x)}{W}\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$A_2 = \int\frac{y_1 f(x)}{W}\mathrm{d}x \tag{4}$$

である．また W は基本解のロンスキアンで，ロンスキー行列が

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda 1x} & e^{\lambda 2x} \\ \lambda_1 e^{\lambda 1x} & \lambda_2 e^{\lambda 2x} \end{pmatrix} \tag{5}$$

だから，$W = \lambda_2 e^{(\lambda 1+\lambda 2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda 1+\lambda 2)x}$ を整理して，

$$W = (\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda 1+\lambda 2)x} \tag{6}$$

である．

- **ベルヌーイ型微分方程式の解法**：

$$y'+p(x)y = q(x)y^n \tag{7}$$

で一般化される非線形微分方程式．$u = y^{1-n}$ と変数変換して，$y' = (1-n)y^{-n}y'$だから，

$$\frac{1}{1-n}u'+p(x)u = q(x) \tag{8}$$

と線形化できる．

- **ロジスティックス方程式**：
  $y' - k_0y = -\frac{k_0}{K}y^2$ は，$u = 1/y$の置換で$u' + k_0u = \frac{k_0}{K}$と線形化できる．特性方程式を使えば瞬殺．$y = \frac{K}{C\exp(-k_0t)+1}$ (C は任意の定数)