- 本日は $x(t)$について議論する．2 階斉次線形微分方程式の標準形は $\dfrac{d^2x}{dt^2}+a_1\dfrac{dx}{dt}+a_0x=0$．
特性方程式を使って解く．

- a_1 がゼロの場合は特別．微分方程式は $\ddot{x}=-\omega^2 x$ と書き換えられる．このとき，特性方程式の根は$\pm i\omega$だから，微分方程式の一般解は

$$x=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}\quad (C_1,\ C_2 \text{ は定数}) \tag{1}$$

- オイラーの公式：$e^{i\omega t}=\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)$，$e^{-i\omega t}=\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)$
- オイラーの公式を使えば，(1)は

$$x=(C_1+C_2)\cos(\omega t)+i(C_1-C_2)\sin(\omega t) \tag{2}$$

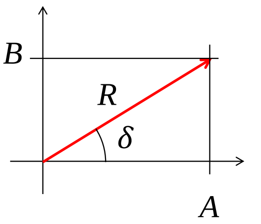
と書き換えられる．
- ほとんどの問題で，従属変数は実数と考えて良いから，(2)は

$$x=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\quad (A,\ B \text{ は定数}) \tag{3}$$

と書き換えられる．

三角関数の変換公式：$A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)=R\cos(\omega t+\delta)$を使えば，

$$x=R\cos(\omega t+\delta)\quad (R,\ \delta \text{ は定数}) \tag{4}$$



(2)，(3)の関係は $R=\sqrt{A^2+B^2}$，$\delta=-\tan^{-1}(B/A)$．覚え方は右図．

- 一般の場合，微分方程式を次のように書き表す．$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\kappa\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$．一般解は

$$x=C_1\exp\left\{\left(-\kappa+\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}\right)t\right\}+C_2\exp\left\{\left(-\kappa-\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}\right)t\right\}\quad (C_1,\ C_2 \text{ は定数}) \tag{5}$$

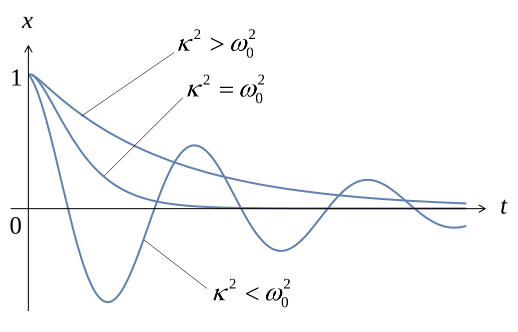
解の様相は，$\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}$ の符号で 3 種類に分けられる．

- $\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}>0$：過減衰　ゆっくり原点に向かう

$$x=C_1e^{-\alpha 1t}+C_2e^{-\alpha 2t}\quad (C_1,\ C_2 \text{ は定数}) \tag{6}$$

- $\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}=0$：臨界減衰　すばやく原点に向かう

$$x=(C_1+C_2t)e^{-\kappa t}\quad (C_1,\ C_2 \text{ は定数}) \tag{7}$$



- $\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}<0$：減衰振動　減衰しつつ振動

$\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2}=\omega$ と置き直し，$x=e^{-\kappa t}\{A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\}$　$(A,\ B \text{ は定数})$　(8)