- 連立微分方程式とは, 複数の従属変数 $y_1, y_2\ldots$ についての微分方程式. ここでは $y_1(x)$, $y_2(x)$ の 2 元連立微分方程式に話を限定する.

- 例題:
$$y_1' - y_1 - 3y_2 = -2 \quad (8.1a)$$
$$y_2' + 2y_1 + 4y_2 = 1 \quad (8.1b)$$

- **連立方程式による解法**:微分方程式を y_1, y_2 単独に分離. 例えば, (8.1a)を y_2 について解き,
$$y_2 = \frac{y_1' - y_1 + 2}{3} \quad (1) \qquad y_2{}' = \frac{y_1{}'' - y_1{}'}{3} \quad (2)$$
を得る. これらを(8.1b)に代入すると, y_1 についての 2 階非斉次線形微分方程式
$$y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = -5 \quad (3)$$
を得る. これを解いて, $y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \frac{5}{2}$ (4)
を得る. (4)を x で 1 回微分し, $y_1' = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$ (5)
を得て, (4), (5)を(8.1a)に代入, 整理すれば
$$y_2 = -\frac{2}{3}C_1 e^{-x} - C_2 e^{-2x} + \frac{3}{2} \quad (6)$$
を得る.

- 連立微分方程式の任意定数の個数は「各従属変数の階数の和」なので注意.

- **微分演算子 D**: $D \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を定義. 置き換えて, あとは連立方程式のように解く.
$$(D-1)y_1 - 3y_2 = -2 \quad (8.1a')$$
$$(D+4)y_2 + 2y_1 = 1 \quad (8.1b')$$
(8.1a')×(D+4)+(8.1b')×3 で y_2 が消え, $(D^2+3D+2)y_1 = -2D-5$ (7)
を得る. あとは D を $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ に戻せば(定数の微分は消えるから), (3)と同じ表式を得る.

- **クラメルの公式**:(8.1a'), (8.1b')を $\begin{pmatrix} D-1 & -3 \\ 2 & D+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (8)
と書き直し, クラメルの公式を適用. y_1 については以下の計算.
$$\begin{vmatrix} D-1 & -3 \\ 2 & D+4 \end{vmatrix} y_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & D+4 \end{vmatrix} \quad (9)$$
行列式を計算すると, y_1 については $(D^2+3D+2)y_1 = -2D-5$ で, (7)と同じ表式を得る.

- 運動の自由度：系の運動を記述するのに必要な従属変数の個数.
- 基準振動とモード：系が n 自由度のとき, n 個の基準振動が存在. それぞれが固有の振動数を持つ.
- 3 個のおもりがばねでつながれ, 1 次元(上下)のみの振動が許される場合, 自由度は 3. したがって, 3 つの基準振動があり, それぞれの形「モード」は右図の様になる.
- 基準振動とモードの考え方は, 連立微分方程式を一次変換の方法で解くとより明快になるが, ここで議論するには余白が狭すぎる.