

# 古典電磁気学における静電流系エネルギーの演繹的導出法

遠藤雅守

〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1

東海大学 理学部 物理学科

E-mail: endo@tokai.ac.jp

(2012年9月3日受付；2012年10月12日受理)

## Deductive derivation method of stored energy in a static current system in classical electromagnetism

by

Masamori ENDO

*Department of Physics, Tokai University,*

*4-1-1 Kitakamane, Hiratsuka, Kanagawa, 259-1292, Japan*

E-mail: endo@tokai.ac.jp

(Received on Sept. 3, 2012; accepted on Oct. 12, 2012)

### 概要

One of the problems of classical electromagnetism, the derivation of the stored energy in a static current system is discussed. In college education, derivation of the fact that “magnetic energy is expressed as the product of the vector potential and current element” is often artful and not straightforward. In fact, it is possible to show that the energy stored in a static current system could be defined as the mechanical work to form the current, starting from the current elements that are initially separated infinitely away. However, wrong conclusion results by the integration of the apparent forces acting on the current elements. This paper presents the completely deductive derivation of the static magnetic energy, starting from a pair of current elements.

### 1 序論

大学における古典電磁気学の教育，具体的には教科書の進め方には大きな二つの流れがある。一つは、

Coulomb の法則および電荷保存を公理と認め、Maxwell 方程式に至る流れを演繹的に証明していく方法、もう一つは Maxwell 方程式を電磁気学の基本方程式とし、そこから帰納的に各種の法則、ひいては電荷保存までを証明していく方法である。

筆者を含め、電磁気学の教育に携わる者の大部分が前者の方法論を支持しているものと思われるが、この場合、磁場に関する諸法則の導出においてたびたび困難に直面する。本稿で議論するのは、時間的に変化の無い電流系のエネルギー  $U_m$  が

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV \quad (1)$$

ここで  $\mathbf{J}$  は電流密度、 $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャル、と表される事実の証明に関するものである。もちろん、多くの教科書で式 (1) を導出する過程に関する記述はあるものの、たいていは磁場  $\mathbf{H}$  が全空間で保持するエネルギーが

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{\mu_0 H^2}{2} dV \quad (2)$$

であることを示してからこれをベクトル恒等式で変形、式 (1) に至る証明法をとる [1-5]。しかし、静電荷系のエネルギーが

1. 静電ポテンシャル  $\phi$  の定義
2. 電荷系のポテンシャルエネルギー  $U_e$  の定義
3. 複数の点電荷よりなる系のエネルギー
4. 分布電荷のエネルギー
5. 電場のエネルギー

と言う流れでストレートに進むのに対して、比較すると静電流系の理論展開はいかにも読者を抱き込むような、悪く言えば騙して納得させるような展開と言わざるを得ない。

本稿では、上の理論展開を完全になぞる形で演繹的に静電流系のエネルギーを求める手法について論じる。内容的には大学初等課程の電磁気学に関するものだが、筆者の知る限りこの手法を用いている教科書は無く、一見するとパラドックスのような結論が得られる点も興味深いため、この場を借りて広く知って頂きたいと考えたのが本稿執筆の動機である。

## 2 静電荷系エネルギーの理論展開

はじめに、対応する静電荷系エネルギーの理論展開を簡単にまとめておく。Coulomb の法則を公理とする古典電磁気学では、静電気力は保存力であり、電荷が存在する系には必ず対応するスカラーポテンシャル場  $\phi$  が定義できる。対応関係は

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi \quad (3)$$

である。

複数の電荷があるとき、系には「静電ポテンシャルエネルギー」があることは間違いない。なぜなら同種電荷は反発力を及ぼし合い、外部に仕事をすることができるからである。そこで、静電荷系のエネルギーを「複数の電荷を無限遠方から近づけていき、所定の位置に置くまでに外力がした仕事」と定義するのが自然であろう。

二つの電荷から始めよう。電荷  $q_1$  に無限遠方から電荷  $q_2$  を近づけていき、距離  $r_{12}$  に置くために、外力は  $q_1$  が作るスカラポテンシャル場の中で、 $q_2$  を「持ち上げる」仕事をしなくてはならない。

電荷  $q_1$  が  $q_2$  の位置に作るポテンシャル  $\phi_{21}$  は  $\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$  だから、外力のした仕事、つまり電荷のポテンシャルエネルギーは

$$W_{12} = q_2 \cdot \phi_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (4)$$

である。式は  $q_1, q_2$  に対して対称なので、 $q_2$  を基準にとって  $q_1$  を距離  $r_{12}$  まで近づけても同じ結果を得る。

次に、無限遠方から  $q_3$  を既にある  $q_1, q_2$  に近づけて行って所定の位置まで持ってくる時に外力がする仕事を考える。ポテンシャルには重ね合わせが成立するため、ただちに

$$W_{13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} \quad (5)$$

$$W_{23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \quad (6)$$

を得る。点電荷が3個あるとき、電荷系が持つ全ポテンシャルエネルギー  $U_e$  は、 $W_{12}, W_{13}, W_{23}$  の和で表され、

$$U_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \quad (7)$$

である。電荷が4つ以上のときも同様の計算をくり返し、任意の  $n$  個の点電荷が存在する系のエネルギーは

$$U_e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (\text{ただし } i < j) \quad (8)$$

と表される。

つぎに、これを系のスカラポテンシャル場を使い書き表す。点電荷が自らの位置に作るポテンシャルの発散を防ぐため、電荷  $q_j$  の位置のポテンシャル  $\phi_j$  を「 $q_j$  以外の電荷が  $q_j$  の位置に作るポテンシャルの合計」と定義する。これはただちに

$$\phi_j = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (\text{ただし } i \neq j) \quad (9)$$

と表される。これと式(8)を比べれば、系のエネルギーは

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_j \phi_j \quad (10)$$

と表される。ここで、係数  $1/2$  が登場した理由は、式(8)では全ての  $i, j$  の組み合わせの半分しか勘定しないため、式(9)での overcounting を修正するためのものである。

電荷分布のポテンシャルエネルギーは、点電荷を微小体積要素  $\Delta V$  の電荷  $\rho \Delta V$  に置き換え、 $\Delta V$  を無限に小さくすれば総和が積分になって、

$$U_e = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_j \rho_j \Delta V_j \phi_j = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV \quad (11)$$

で与えられる。

### 3 静電流系エネルギーの理論展開

#### 3.1 ベクトルポテンシャルの定義

次に、同様の理論展開で静電流系のエネルギーが式 (1) となることを示したい。多くの教科書で、ベクトルポテンシャルとは「磁場の発散がゼロなのだから、 $\mathbf{B}$  は必ずあるベクトル場の回転で表されるはずである」と帰納的な導入を行うが、演繹的手法では以下の様に、動く電荷が作るポテンシャル場として「自然に」ベクトルポテンシャルが定義される [6].

原点にある、一定の速度  $\mathbf{v}$  で運動する点電荷  $q$  を考える。それによって作られる磁束密度は Biot-Savart の法則によって

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} q \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}} \quad (12)$$

である。これを、点電荷が作る電場  $\mathbf{E}$  を使って表そう。 $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$  であるから、これを  $\hat{\mathbf{r}}$  について解き、式 (12) に代入すると  $r$  が都合良く消えて、 $\mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}$  である。これを、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  を使い

$$\mathbf{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times (\nabla\phi) \quad (13)$$

と書き直す。次に、ベクトル恒等式  $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla\phi)$  を使えば、

$$\mathbf{v} \times (\nabla\phi) = -\nabla \times (\phi \mathbf{v}) + \phi(\nabla \times \mathbf{v}) \quad (14)$$

で、 $\mathbf{v}$  の回転はゼロだから第 2 項は消滅し、

$$\mathbf{v} \times (\nabla\phi) = -\nabla \times (\phi \mathbf{v}) \quad (15)$$

である。従ってベクトル  $\mathbf{A}$  を  $(\epsilon_0 \mu_0 \phi \mathbf{v})$  と定義すれば、動く電荷が作る磁場が

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (16)$$

と、ベクトル場  $\mathbf{A}$  の回転で表せることがわかる。

動く電荷は  $q\mathbf{v}$  は電流素片  $I d\mathbf{s}$  と等価であるから、原点にある電流素片が作るベクトルポテンシャルは  $\phi$  を  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  で書き直して

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} I d\mathbf{s} \quad (17)$$

と与えられる。

あらゆる電流は電流素片に分解できる。一方、ベクトルの回転に分配則が成り立つことから、ベクトルポテンシャルにも重ね合わせが許される。すなわち、任意の電流が作るベクトルポテンシャルは、電流を電流素片に分解し、個々の電流素片が作るベクトルポテンシャルの重ね合わせで表現できることになる。

体積分布する電流密度  $\mathbf{J}$  において電流素片は  $\mathbf{J} dV$  と定義されるから、図 1 に示される点 P のベクトルポテンシャルは、電流が存在する範囲で体積積分して、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (18)$$

と求められる。

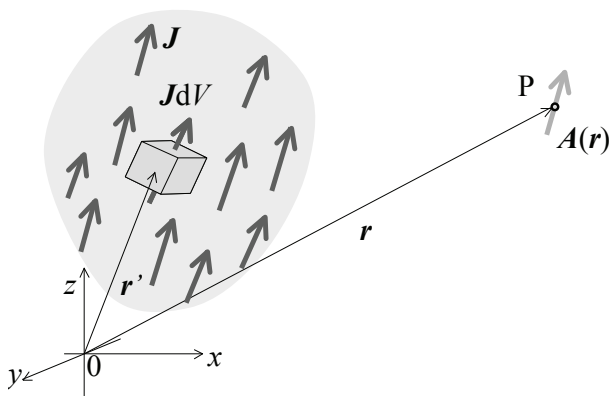


図 1: 分布する電流が点 P に作るベクトルポテンシャルを計算する手順

### 3.2 静電流系エネルギーの定義

次に、静電流系エネルギーの定義を、静電荷系に倣い、「複数の電流素片を無限遠方から近づけていき、所定の位置に置くまでに外力がした仕事」と定義する。まず、二つの電流素片から始めよう。簡単のため、 $I ds_2$  を  $I ds_1$  に平行に、真横から近づけていくことを考える。 $I ds_2$  が  $I ds_1$  の作る磁場から受ける力は、 $I ds_2$  と  $B_{21}$  の向きを考えれば引力であることがわかる。つまり、外力はマイナスの仕事をする。この仕事を「力学的仕事」 $W_{\text{mech}}$  と呼ぼう。力の大きさは Biot-Savart の法則から

$$F_0 = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I ds_1 I ds_2 \quad (19)$$

で、 $I ds_2$  を無限遠方から  $r_{12}$  まで近づけたとき外力がした仕事は

$$\begin{aligned} W_{\text{mech}} &= - \int_{r_{12}}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I ds_1 I ds_2 dr \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi r_{12}} I ds_1 I ds_2 \end{aligned} \quad (20)$$

である。一方、 $I ds_1$  が  $I ds_2$  の位置に作るベクトルポテンシャル、 $A_{21}$  が

$$A_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi r_{21}} I ds_1 \quad (21)$$

と表されるため、これは内積を使って<sup>1</sup>

$$W_{\text{mech}} = -I ds_2 \cdot A_{21} \quad (22)$$

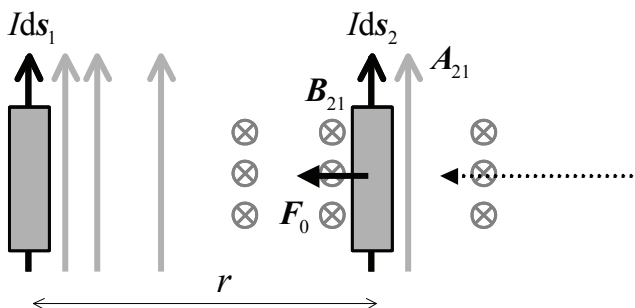


図 2: 電流素片  $I ds_2$  を電流素片  $I ds_1$  に、真横から平行を保って近づけていく

<sup>1</sup>証明はしないが、一般的に二つの電流素片がどのような位置関係でも  $W_{\text{mech}}$  は内積で置き換えられる。

と表される。これは、式 (1) で示される静電流系エネルギーと形が同じであるものの、符号が反対である。前野著「よくわかる電磁気学」[7]では、敢えてこの形を「電流素片の位置エネルギー」と定義して、「同じ方向の電流同士が吸引力を及ぼすのは位置エネルギーが負になるからである」としている。同書ではその後、式 (1) に至る展開が無いため、(認識が正しいかどうかは別として) 読者はこの解釈に納得することができる。しかし、結論として式 (1) に至るためには、ここまでの理論展開には何らかの不備があることを認めなくてはならない。

### 3.3 電流素片に働く 3 つの力

一見パラドックスめいた展開になったが、この問題は多くの教科書で指摘されているもので、新しい話題では無い。しかし、この問題を分かりやすく読者に伝えようとする教科書が皆無と言って良いのもまた事実である。例外はファインマン著「ファインマン物理学 III 電磁気学」[8]で、同書ではループ電流を磁場中で動かす仕事を、ループを引っ張る「機械的仕事」と電流を維持するための「電気的仕事」に分け、読者の理解を助けている。

正解を言うと、ここで見落としていたものは「電流素片を維持するために外力がする仕事」で、これを考えれば最終的に正しい形を与えることを示そう。

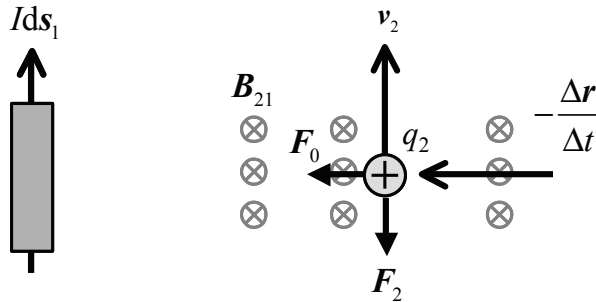


図 3: 電流素片  $Ids_2$  を動く電荷に置き換える。近づく速度は  $-\Delta r/\Delta t$  とする。

電流素片とは「運動する電荷」である。図 3 の様に、図 2 における  $Ids_2$  を速度  $v_2$  で動く電荷  $q_2$  で書き換える。ここで、電流素片 2 を近づける速度を  $-\Delta r/\Delta t$  とする。すると電荷は速度  $v_2$  と速度  $-\Delta r/\Delta t$  の合成速度で動いていることになり、電荷に働く Lorentz 力は  $F_0$  と

$$\mathbf{F}_2 = -q_2 \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \times \mathbf{B}_{21} \quad (23)$$

の合力となる。 $F_2$  は  $v_2$  を減速させる方向に働くため、外力は  $v_2$  を維持するため (電流素片の大きさを一定に保つため) 電荷を押してやらなくてはならない。これを、「電気的仕事」 $W_{\text{elec}}$  としよう。

図 3 から、電荷  $q_2$  が距離  $-\Delta r$  動く間に  $F_2$  と向きが反対で同じ大きさの外力がした仕事を求める。

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{elec}} &= -\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \Delta t = q_2 \left( \frac{\Delta r}{\Delta t} \right) \left( \frac{\mu_0}{4\pi r^2} Ids_1 \right) v_2 \Delta t \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} Ids_1 q_2 v_2 \Delta r \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} Ids_1 Ids_2 \Delta r \end{aligned} \quad (24)$$

これを、 $q_2$  を無限遠方から  $r_{12}$  に置くまでの間積分すれば、

$$W_{\text{elec}} = \frac{\mu_0}{4\pi r_{12}} Ids_1 Ids_2 \quad (25)$$

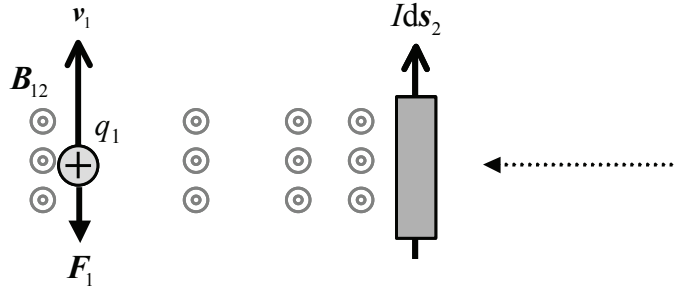


図 4: 電流素片  $Ids_2$  が近づいて来るとき, 電流素片  $Ids_1$  は「変化する磁場」を感じる.

となり, 結果はちょうど  $W_{\text{mech}}$  を打ち消す大きさとなる. この意味するところを考えると, これは「運動する荷電粒子に働く磁気力は常に運動方向に垂直なため, 静磁場は粒子に対して仕事をしない」という定理に相当する関係であることがわかる. すなわち, 静磁場中を運動する荷電粒子の, 運動速度の絶対値 (電流素片の大きさ) が変わらないとき, 粒子に加えられた正味の仕事はゼロでなくてはならない. したがって  $W_{\text{mech}} + W_{\text{elec}} = 0$  の関係は, 電流素片をどのように近づける場合でも成立する.

では, 二つの電流素片を近づけていくとき外力がする仕事は正味ゼロかということそうでは無い. 我々はまだ第 3 の力を勘定に入れていない. 三つ目の力は, 「電流素片  $Ids_1$  の電荷を減速させる力」である.

図 4 を見てみよう. 電流素片  $Ids_1$  もまた運動する電荷であり, その電荷は  $Ids_2$  が発する磁場中に置かれている.  $Ids_2$  が  $Ids_1$  に近づいていけば,  $Ids_2$  が発する磁場は  $Ids_1$  の位置で時間と共に変化する. 変化する磁場は誘導電場を生み, その向きは二つの電流素片が平行に近づいていくとき,  $q_1$  を減速させようとする向きである. これを  $\mathbf{F}_1$  としよう.

$\mathbf{F}_1$  を電磁誘導から直接求めるのは大変な仕事だが, 視点を  $Ids_2$  に置いて現象を眺めれば, これは「固定された  $Ids_2$  に  $Ids_1$  を近づけていく」ときに  $Ids_1$  が受ける Lorentz 力に見えるため,  $\mathbf{F}_1$  は

$$\mathbf{F}_1 = q_1 \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \times \mathbf{B}_{12} \quad (26)$$

と書き表せることがただちにわかる. したがって,  $Ids_2$  を無限遠から  $r_{12}$  まで近づけている間,  $\mathbf{v}_1$  を一定に保つために第 3 の外力  $-\mathbf{F}_1$  がする仕事は以下の様に求められる.

$$\begin{aligned} \Delta W'_{\text{elec}} &= -\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \Delta t = q_1 \left( \frac{\Delta r}{\Delta t} \right) \left( \frac{\mu_0}{4\pi r^2} Ids_2 \right) v_1 \Delta t \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} Ids_2 q_1 v_1 \Delta r \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} Ids_1 Ids_2 \Delta r \end{aligned} \quad (27)$$

$$\therefore W'_{\text{elec}} = \frac{\mu_0}{4\pi r_{12}} Ids_1 Ids_2 \quad (28)$$

これは電流素片  $Ids_2$  になされた仕事,  $W_{\text{elec}}$  にちょうど等しい大きさである.

結局, 三つの外力がした仕事を全て加えると,

$$W_{\text{total}} = W_{\text{mech}} + W_{\text{elec}} + W'_{\text{elec}} \quad (29)$$

だが,  $W_{\text{mech}} = -W_{\text{elec}}$  と  $W_{\text{elec}} = W'_{\text{elec}}$  の関係があるため

$$W_{\text{total}} = -W_{\text{mech}} \quad (30)$$



となり、正味の仕事はちょうど前節で与えられた  $-I d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{A}_{21}$  の符号を入れ換えた形になることがわかる。定義からこれが系の磁気的エネルギー  $U_m$  であり、これは式 (1) の表現に一致するため、パラドックスが解消された。

### 3.4 静電流系エネルギーの演繹的導出

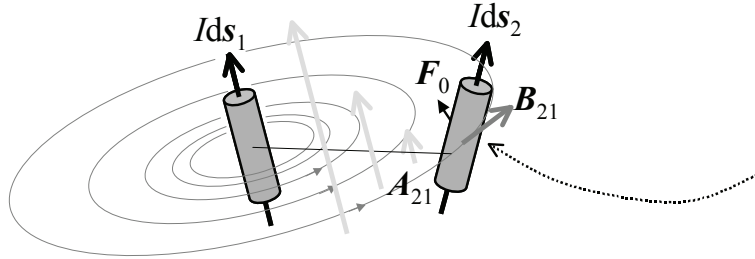


図 5: 電流素片  $I d\mathbf{s}_1$  が作る磁場の中にある電流素片  $I d\mathbf{s}_2$  が受ける力

最後に、電流素片を近づけていく方法を限定せずに、外力がした力学的仕事  $W_{\text{mech}}$  を求める。図 5 は、固定された  $I d\mathbf{s}_1$  に  $I d\mathbf{s}_2$  を任意の経路で近づけていく様子である。この場合、 $\mathbf{F}_0$  は

$$\mathbf{F}_0 = I d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{B}_{21} = -I (\mathbf{B}_{21} \times d\mathbf{s}_2) \quad (31)$$

と表される。電流素片  $I d\mathbf{s}_2$  が  $d\mathbf{x}$  動いたとき外力  $-\mathbf{F}_0$  がした仕事、 $dW_{\text{mech}}$  は

$$dW_{\text{mech}} = -\mathbf{F}_0 \cdot d\mathbf{x} = I d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{B}_{21} \times d\mathbf{s}_2) \quad (32)$$

である。三重積の公式を使ってこれを

$$dW_{\text{mech}} = I \mathbf{B}_{21} \cdot (d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{x}) \quad (33)$$

と変形しておく。

電流素片  $I d\mathbf{s}_2$  が動くと、その後に「道」ができるが、ベクトル  $d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{x}$  は図 6 でグレーになっている部分の微小面積要素ベクトル  $d\mathbf{S}$  に書き直せる。

図 7 は無限遠方から  $I d\mathbf{s}_2$  を  $\mathbf{r}_{12}$  に置くまでに通った軌跡を示している。外力がする仕事、 $W_{\text{mech}}$  は積分

$$W_{\text{mech}} = \int_{\infty}^{r_{12}} I \mathbf{B}_{21} \cdot (d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{x}) \quad (34)$$

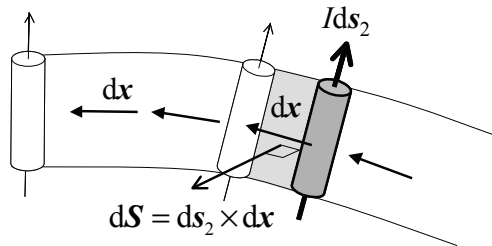


図 6: 電流素片が動くとき、軌跡の面積ベクトル  $d\mathbf{S}$  は  $d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{x}$  と表せる。



で表されるが、これは

$$W_{\text{mech}} = I \iint_S \mathbf{B}_{21} \cdot d\mathbf{S} \quad (35)$$

と書き直すことができる。つまり、 $W_{\text{mech}}$  を求めるには、「道」を貫く磁束を求めれば良いことが分かる。

$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$  と変形し、Stokes の定理を使おう。すると  $W_{\text{mech}}$  は以下の様に、「道」の周囲を回る周回積分に変形される。

$$W_{\text{mech}} = I \iint_S \text{rot}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = I \oint_r \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (36)$$

$d\mathbf{r}$  は、図 7 の積分路に沿って取った微小線要素ベクトルである。ここで、面積分と周回積分の関係から、周回路は電流素片  $I d\mathbf{s}_2$  を必ず逆向きに通ることに注意せよ。

いま、周回積分を 4 つのパスに分けて考えて見よう。  $d\mathbf{s}_2$  は電流素片の大きさなので非常に小さい。すると、パス 2 とパス 4 の積分ほとんど同じところを通るので、符号が逆で全く同じ大きさになるだろう。また、パス 3 は、無限遠方にあるので  $\mathbf{A} = 0$  である。従って残るのはパス 1 の積分値のみで、これは  $\mathbf{A}_{21}$  と  $d\mathbf{s}_2$  の内積を使って

$$W_{\text{mech}} = -I \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{s}_2 = -I d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{A}_{21} \quad (37)$$

と書ける。

今度は、 $I d\mathbf{s}_2$  を固定して、 $I d\mathbf{s}_1$  を無限遠方から近づければ、同様に

$$W'_{\text{mech}} = -I d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{A}_{12} \quad (38)$$

を得る。力学的仕事は  $W_{\text{mech}}$  とも  $W'_{\text{mech}}$  とも書けることになるが、両者は同じものであるので、両方を使いこれを

$$W_{12} = -\frac{1}{2} (I d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{A}_{12} + I d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{A}_{21}) \quad (39)$$

と書こう。系の磁気的エネルギーは  $W_{\text{mech}}$  を符号反転したものだから、

$$U_{m12} = \frac{1}{2} (I d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{A}_{12} + I d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{A}_{21}) \quad (40)$$

である。

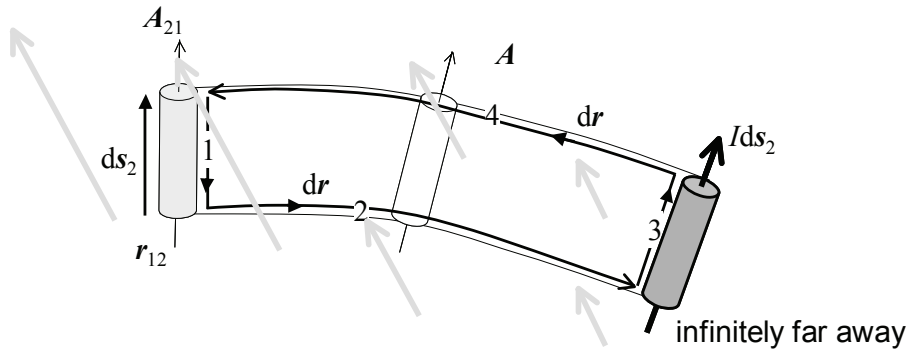


図 7: 電流素片  $I d\mathbf{s}_2$  になされた力学的仕事  $W_{\text{mech}}$  は、電流素片  $I d\mathbf{s}_1$  が作るベクトルポテンシャル場の周回積分に変形された。

続いて、ここに三つめの電流素片を近づけて見る。  $I d\mathbf{s}_3$  は  $I d\mathbf{s}_1$  と  $I d\mathbf{s}_2$  の双方から力を受けるが、重ね合わせの原理があるので、

$$U_{m13} = \frac{1}{2} (I d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{A}_{13} + I d\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{A}_{31}) \quad (41)$$

$$U_{m23} = \frac{1}{2} (I d\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{A}_{23} + I d\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{A}_{32}) \quad (42)$$

となる。このとき、系の全エネルギーは  $U_{m12} + U_{m13} + U_{m23}$  である。これを  $n$  個の電流素片からなる系に拡張すれば、系のエネルギーは

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (I d\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{A}_{ij} + I d\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{A}_{ji}) \quad (\text{ただし } i \neq j) \quad (43)$$

と表される。

ここで、静電場と同じように、電流素片  $I d\mathbf{s}_j$  の位置に他の電流素片が作るベクトルポテンシャルを  $\mathbf{A}_j$  として式 (43) を書き直せば、 $U_m$  は以下の様に表せる。

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I d\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{A}_i \quad (44)$$

最後に、式 (44) を、連続分布する電荷と同様に連続分布する電流に拡張する。電流密度ベクトル場  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  において、電流素片は  $\mathbf{J}dV$  だから、総和を積分で置き換えて

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV \quad (45)$$

となり、式 (1) が示された。

### 3.5 「電流素片の位置エネルギー」の物理的解釈

最後に、式 (22) から定義される「電流素片の位置エネルギー」について若干の補足を加える。式 (22) によれば、同じ方向の電流素片は引力を及ぼし合うため、素直に「電流素片の位置エネルギー」を定義すれば、それは負の値を持つ事になる。しかし、これは力とポテンシャルの関係から便宜的にそう決めたもので、実際に系が持つエネルギーとは異なる物理量を「位置エネルギー」と呼んでいるだけ、というのが正しい解釈である。

似たような関係になる、単純な例を挙げると理解の助けとなるだろう。図 8 は、一定の電圧  $V$  に保たれた極板間距離  $x$ 、極板面積  $S$  の平行平板コンデンサーと、極板に働く力を図示したものである。エネルギーは極板間にしか存在せず (実は、この「思い込み」が間違いなのだが)、極板間の電場エネルギーは

$$U_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} (xS) = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x} \quad (46)$$

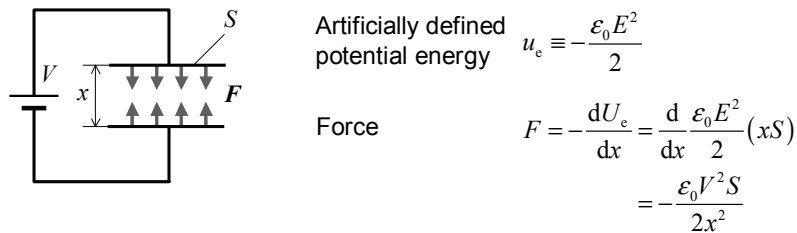


図 8: 一定電圧に保たれた平行平板コンデンサーに働く力を仮想変位の方法で求める。

で与えられる。

「仮想変位の方法」により、 $x$  を減らせばエネルギーが増加することから、極板には反発力が働くことが予想される。しかし、実際には極板間に働くのは吸引力である。なぜなら、極板を近づけたとき、極板間電位差を一定に保つためには電源から極板に電荷を供給する必要がある、その際電源が失ったエネルギーと増加した電場エネルギーを加えると、全体として系のエネルギーは減少するからである。

電源が失ったエネルギーは増加した電場エネルギーのちょうど2倍で、これは本稿で考えている問題のアナロジーとなっている。したがって、図8の系に限り、人為的に「極板間の単位体積当たり電場エネルギーを  $u_e = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  とする」と定義してしまえば、単純な力とエネルギーの関係が復活する。これが、「電流素片の位置エネルギー」が持つ物理的な意味である。

#### 4 まとめ

古典電磁気学教育の一つの柱である「演繹的アプローチ」において、静電流系のエネルギーが「ベクトルポテンシャルと電流密度の積」で表されることを示すのに困難が伴うことを指摘した。多くの教科書ではこの困難を迂回することで結果的に式(1)を示すが、静電荷系と全く同じ手法でこれを示した教科書は筆者の知る限りでは見当たらない。本稿では静電荷系と全く同じ手法、即ち「静電流系のエネルギーは複数の電流素片を無限遠方から近づけて行き、所定の位置に置くために外力がする仕事」で最終的に式(1)を導出する示す方法を示した。ところが、その過程において、同じ方向を向く電流素片同士が引力を及ぼすことから、外力のする仕事を負となり、一見「静電流系のエネルギーがマイナスになる」奇妙な現象が見られることに言及した。そして、正しい結論に至るためには、近づけていく双方の電流素片を維持するため、外力が「電氣的仕事」をする必要があること、そして、片方の電流素片に対して行われる電氣的仕事は、電流素片を近づける際に外力が行う(負の)力学的仕事をちょうど打ち消す大きさであることを示した。

#### 参考文献

- [1] 小塚洋司, 「新装版 電磁気学 その物理像と詳論」(森北出版, 2012) pp. 230-232.
- [2] 太田浩一, 「電磁気学の基礎 I」(シュプリンガー・ジャパン, 2007) pp. 226-227.
- [3] V. D. Barger, M. G. Olsson, 小林徹郎・土佐幸子訳, 「電磁気学-新しい視点にたって I」(培風館, 1991) pp. 220-221.
- [4] 砂川重信, 「理論電磁気学」(紀伊國屋書店, 1973) pp. 136-137.
- [5] 高橋秀俊, 「物理学選書 3 電磁気学」(裳華房, 1959) pp. 221-222.
- [6] 後藤尚久, 「なっとくする電磁気学」(講談社, 1993) pp. 258-261.
- [7] 前野昌弘, 「よくわかる電磁気学」(東京図書, 2010) pp. 226-228.
- [8] R. P. Feinmann *et al.*, 宮島龍興訳, 「ファイマン物理学 III 電磁気学」(岩波書店, 1999) pp. 183-188.